2019 年度 数学基礎論サマースクール「選択公理と連続体仮説」
コーエンの強制法 第 2 回目 宿題

$\boxed{\text{問題}}$ 半順序 $\mathbb{C}$ を $\mathbb{C} = \bigcup_{n\in\omega} {}^{n}\omega$, $\leq_{\mathbb{C}} = \supseteq$ とし，${}^{\omega}\mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の積半順序とします．このとき，

$$\Vdash_{{}^{\omega}\mathbb{C}} \text{“}\check{\mathbb{R}}\text{は可算集合である”}$$

ことが成り立つことを示しましょう．

さらに，どの無限基数 κ に対しても

$$\Vdash_{{}^{\kappa}\mathbb{C}} \text{“}\check{\mathbb{R}}\text{は可算集合である”}$$

ことも証明できます．

$\boxed{\text{解答}}$ ここの解答も，以下のような方法だけでなく，他の方法も考えられます．みなさんそれぞれの証明を考えてください．以下の証明で，「${}^{\omega}\{0,1\}$ と ${}^{\omega}\omega$ の間に全単射が存在する」ことに注意してください．その点はご勘弁を．

まず証明のための準備をします．いま，$\overline{d} = \langle d(n) | n \in \omega \rangle$，各 $d(n) : \omega \to \omega$ とします．$\overline{d} \in {}^{\omega}({}^{\omega}\omega)$ です．このような $\overline{d}$ と $j \in \omega$ に対して，${}^{\omega}\omega$ の元 $\langle a_k^{\overline{d},j} | k \in \omega \rangle$ を，$k \in \omega$ に関する再帰により

$$a_0^{\overline{d},j} = d(0)(j),$$

$$a_{k+1}^{\overline{d},j} = d(k+1)(a_k^{\overline{d},j})$$

と定義し，さらに，各 $k \in \omega$ に対して

$$b_k^{\overline{d},j} = a_k^{\overline{d},j} \bmod 2,$$

$$X(\overline{d}) = \left\{ \langle b_k^{\overline{d},j} | k \in \omega \rangle \,\middle|\, j \in \omega \right\}$$

と定義します．$X(\overline{d})$ は ${}^{\omega}\{0,1\}$ の可算部分集合です．

以下，$\mathbb{P} = {}^{\omega}\mathbb{C}$ とします．$\mathbb{P}$-name $\dot{x}$ と $\dot{y}$ に対して，

$$\mathrm{up}(\dot{x}, \dot{y}) = \{\langle \dot{x}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \rangle, \langle \dot{y}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \rangle\},$$

$$\mathrm{op}(\dot{x}, \dot{y}) = \mathrm{up}(\mathrm{up}(\dot{x}, \dot{x}), \mathrm{up}(\dot{x}, \dot{y}))$$

でした．各 $n \in \omega$ に対して，次のように定義します．

$$\dot{c}_n = \left\{ \langle \mathrm{op}(\check{\xi}, \check{\eta}), p \rangle \,\middle|\, p \in \mathbb{P} \wedge \langle \xi, \eta \rangle \in p(n) \right\}.$$

このとき，

$$\Vdash_{\mathbb{P}} ({}^{\omega}\check{\{0,1\}}) \subseteq X(\langle \dot{c}_n | n \in \omega \rangle),$$

つまり，どの $f \in {}^{\omega}\{0,1\}$ とどの $p \in \mathbb{P}$ に対しても，$q \leq_{\mathbb{P}} p$ を満たすある $q \in \mathbb{P}$ とある $j \in \omega$ に対して，次が成り立ちます．

$$q \Vdash_{\mathbb{P}} \check{f} = \langle b_k^{\langle \dot{c}_n | n \in \omega \rangle, j} | k \in \omega \rangle.$$

最後のステップを示します．$f \in {}^{\omega}\{0,1\}$ と $p \in \mathbb{P}$ が与えられたとき，q を $q \leq_{\mathbb{P}} p$ と次を満たすように構成すれば良いです．

$$q(0)(\mathrm{dom}(p(0)) = 2\,\mathrm{dom}(p(1)) + f(0) \text{（これを } b^0 \text{ と書く），}$$

$$q(k+1)(b^k) = 2\,\mathrm{dom}(p(k+2)) + f(k+1) \text{（これを } b^{k+1} \text{ と書く）．}$$