2019年度 数学基礎論サマースクール「選択公理と連続体仮説」
コーエンの強制法 第1回目 宿題

半順序 $\mathbb{P}$ における強制法を，論理式の複雑さなどによる再帰により，次のように定義します．以下，$p \in \mathbb{P}$，$\dot{x}$ と $\dot{y}$，$\dot{x}_0$，$\cdots$，$\dot{x}_n$ は $\mathbb{P}$-name です．

- $\mathbb{P}$ による原子論理式の強制 $p \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{x} \in \dot{y}$ と $p \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{x} = \dot{y}$ は講義通りの定義とします．
- $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\dot{x}_0, \cdots, \dot{x}_n) \wedge \psi(\dot{x}_0, \cdots, \dot{x}_n)$ とは，$p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\dot{x}_0, \cdots, \dot{x}_n)$ と $p \Vdash_{\mathbb{P}} \psi(\dot{x}_0, \cdots, \dot{x}_n)$ の両方が成り立つこととします．
- $p \Vdash_{\mathbb{P}} \neg\varphi(\dot{x}_0, \cdots, \dot{x}_n)$ とは，$q \leq_{\mathbb{P}} p$ と $q \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\dot{x}_0, \cdots, \dot{x}_n)$ を同時に満たす $q \in \mathbb{P}$ が存在しないこととします．
- $p \Vdash_{\mathbb{P}} \exists v\, \varphi(v, \dot{x}_0, \cdots, \dot{x}_n)$ とは，$\mathbb{P}$ の部分集合

$$\left\{q \in \mathbb{P} \,\middle|\, \left(\exists \dot{y} \in V^{\mathbb{P}}\right) q \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\dot{y}, \dot{x}_0, \cdots, \dot{x}_n)\right\}$$

  が p 以下で稠密であることとします．

$\boxed{\text{問題}}$ (1) $\varphi \vee \psi$ を $\neg((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi))$ であると考えたとき，$p \Vdash_{\mathbb{P}} (\varphi \vee \psi)$ は，$\mathbb{P}$ の部分集合 $\left\{q \in \mathbb{P} \,\middle|\, \left(q \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi\right) \vee \left(q \Vdash_{\mathbb{P}} \psi\right)\right\}$ が p 以下で稠密であることと同値であることを示しましょう．
(2) $p \Vdash_{\mathbb{P}} (\varphi \vee \psi)$ と「$p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$ または $p \Vdash_{\mathbb{P}} \psi$」は必ずしも同値ではないことを，例を挙げて説明してください．

$\boxed{\text{解答}}$ (1)

$$\begin{aligned} & p \Vdash_{\mathbb{P}} \neg((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)) \\ \iff & \forall q \leq_{\mathbb{P}} p\Big(q \not\Vdash_{\mathbb{P}} ((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi))\Big) \\ \iff & \forall q \leq_{\mathbb{P}} p\Big(\Big(q \not\Vdash_{\mathbb{P}} \neg\varphi\Big) \vee \Big(q \not\Vdash_{\mathbb{P}} \neg\psi\Big)\Big) \\ \iff & \forall q \leq_{\mathbb{P}} p \exists r \leq_{\mathbb{P}} q\Big(\Big(r \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi\Big) \vee \Big(r \Vdash_{\mathbb{P}} \psi\Big)\Big) \end{aligned}$$

(2) ここの解答は本当にたくさんあります．以下はほんの一例です．

φ を $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ という命題，ψ を $2^{\aleph_0} \geq \aleph_2$ という命題とし，$\mathbb{P}_0$ を $\Vdash_{\mathbb{P}_0} \varphi$ を満たす半順序，$\mathbb{P}_1$ を $\Vdash_{\mathbb{P}_1} \psi$ を満たす半順序とします（このような $\mathbb{P}_0$ と $\mathbb{P}_1$ はあります）．$\mathbb{1}$ を $\mathbb{P}_0$ の元でも $\mathbb{P}_1$ の元でもないものとし，半順序 $\mathbb{Q}$ を

$$\mathbb{Q} = \{\mathbb{1}\} \cup \mathbb{P}_0 \cup \mathbb{P}_1,$$

$$\leq_{\mathbb{Q}} = \ \{\langle p, \mathbb{1}\rangle \mid p \in \mathbb{P}_0 \cup \mathbb{P}_1\} \cup \leq_{\mathbb{P}_0} \cup \leq_{\mathbb{P}_1}$$

と定義します．このとき，$\mathbb{1} \Vdash_{\mathbb{Q}} \varphi \vee \psi$ は成り立ちますが，$\mathbb{1} \Vdash_{\mathbb{Q}} \varphi$ と $\mathbb{1} \Vdash_{\mathbb{Q}} \psi$ のどちらも成り立ちません．