ゲーデルの構成可能集合のユニヴァース III
L と巨大基数

酒井 拓史

神戸大学

2019 年 数学基礎論サマースクール

Section 1

巨大基数の概要

巨大基数とは

- 巨大基数： ZFC で存在が証明できないような，非常に大きな基数
- 到達不能基数・可測基数・コンパクト基数など，数多くの巨大基数がこれまでに定式化されている．
- 多くの巨大基数が，ω に似た不可算基数になっている．
- 巨大基数公理： 巨大基数の存在を主張する公理
- 実数の集合に関する命題で，ZFC からは証明できないものが，ZFC に巨大基数公理を加えた公理系では証明できる．
（ゲーデルのプログラム）

公理系の無矛盾性の強さ

A, B : ZF に有限個の公理を付け加えた公理系

- 「A が無矛盾ならば B が無矛盾」と「B が無矛盾ならば A が無矛盾」の両方が示されたとき，A と B は無矛盾等価であるという.

  例： ZF と ZFC + GCH は無矛盾等価.

- $\overline{\mathrm{Con}}(\overline{A})$:「A は無矛盾である」ことを集合論で形式化したもの

- A と B が無矛盾等価のとき，私の知る限り，おそらく，
  $\mathrm{ZF} \vdash \overline{\mathrm{Con}}(\overline{A}) \leftrightarrow \overline{\mathrm{Con}}(\overline{B})$.

- $A \vdash \overline{\mathrm{Con}}(\overline{B})$ であるとき，
  - $\mathrm{ZF} \vdash \overline{\mathrm{Con}}(\overline{A}) \to \overline{\mathrm{Con}}(\overline{B})$,
  - A が無矛盾ならば，第二不完全性定理より $A \nvdash \overline{\mathrm{Con}}(\overline{A})$ なので，

    $\mathrm{ZF} \nvdash \overline{\mathrm{Con}}(\overline{B}) \to \overline{\mathrm{Con}}(\overline{A})$.

- $A \vdash \overline{\mathrm{Con}}(\overline{B})$ のとき，A は B より無矛盾性の強さが強いという.

巨大基数公理と無矛盾性の強さ

- ZFC に巨大基数公理を加えた公理系たちは，無矛盾性の強さについてほぼ線形の階層をなす．
- 様々な公理系が ZFC に何らかの巨大基数公理を加えた公理系と無矛盾等価になることが知られている．

$\Rightarrow$ 巨大基数公理は，公理系の無矛盾性の強さを測る尺度の役割を果たす．

A : ZFC に巨大基数公理を加えた公理系
B : ZF に（巨大基数公理以外の）公理を加えた公理系

- 「A が無矛盾ならば B は無矛盾」の証明：強制法によることが多い
- 「B が無矛盾ならば A は無矛盾」の証明：内部モデルによることが多い

今日の講義は，集合論で議論するとき，特に指定しない限り ZFC のもとで議論する．

Section 2

到達不能基数

到達不能基数

κ を無限基数とする.

- κ は正則 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ すべての $X \subseteq \kappa$ に対して, $|X| < \kappa$ なら $\sup(X) < \kappa$.
- κ は強極限 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ すべての $\alpha < \kappa$ に対して $|\mathcal{P}(\alpha)| < \kappa$.
- ω は正則かつ強極限.
- κ は到達不能基数 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ κ は正則かつ強極限な不可算基数.

$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$: 強極限ではない（カントールの定理）

ω_ω : 正則ではない
（$X := \{\omega_n \mid n \in \omega\}$ とすると, $|X| = \omega < \omega_\omega$ で $\sup(X) = \omega_\omega$）

到達不能基数の存在の証明不可能性

定理（ZFC）

- κ が到達不能基数なら，$V_\kappa \models \overline{\mathrm{ZFC}}$.
- 到達不能基数が存在すれば，$\overline{\mathrm{Con}}(\overline{\mathrm{ZFC}})$.

第二不完全性定理より，次が従う．

定理（メタ理論）

ZFC が無矛盾ならば，ZFC $\nvdash$“到達不能基数が存在する”．

到達不能基数公理（Inacc）:「到達不能基数が存在する．」

- ZFC + Inacc は ZFC より無矛盾性の強さが強い．

完全集合の性質

ここでは ZF のもとで議論する．

$X \subseteq \mathbb{R}$ とする．

- X が完全集合 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ X は孤立点のない閉集合．
- X が空でない完全集合なら，$X \sim \mathbb{R}$.
- X が完全集合の性質を持つ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ X は可算か，空でない完全集合を含む．
- X が完全集合の性質を持てば，X は連続体仮説の反例ではない．
- X が閉集合なら X は完全集合の性質を持つ．
- 選択公理を仮定すると，完全集合の性質を持たない $\mathbb{R}$ の部分集合が存在する．

すべての集合のルベーグ可測性と完全集合の性質 1

- DC：従属選択公理
- LM：「すべての $\mathbb{R}$ の部分集合はルベーグ可測.」
- PP：「すべての $\mathbb{R}$ の部分集合は完全集合の性質を持つ.」

ソロヴェイの定理（メタ理論）

ZFC + Inacc が無矛盾ならば ZF + DC + LM + PP も無矛盾.

証明の方法：強制法

スペッカーの定理（メタ理論）

ZF + DC + PP が無矛盾ならば ZFC + Inacc も無矛盾.

証明の方法：ZF + DC + PP で $\mathrm{Inacc}^{\mathrm{L}}$ を示す.

シェラーの定理（メタ理論）

ZF + DC + LM が無矛盾ならば ZFC + Inacc も無矛盾.

証明の方法：ZF + DC + LM で $\mathrm{Inacc}^{\mathrm{L}}$ を示す.

すべての集合のルベーグ可測性と完全集合の性質 2

系（メタ理論）

$\mathrm{ZF} + \mathrm{DC} + \mathrm{LM} + \mathrm{PP}$ と $\mathrm{ZFC} + \mathrm{Inacc}$ は無矛盾等価.

射影集合 1

S を位相空間とし，$X \subseteq S$ とする．

- X は S の Σ^1_1-集合（解析集合） $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
  $S \times S$ のボレル集合が存在し，$X = p[Z] = \{x \mid \exists y\,(\langle x, y\rangle \in Z)\}$.
- X は S の Π^1_1-集合 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $S \setminus X$ が S の Σ^1_1-集合.
- X は S の Δ^1_1-集合 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ X は S の Σ^1_1-集合かつ Π^1_1-集合.

自然数 $n \geq 2$ に対して，次のように再帰的に定める．

- X は S の Σ^1_n-集合 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
  $S \times S$ の Π^1_{n-1}-集合 Z が存在し，$X = p[Z]$.
- X は S の Π^1_n-集合 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $S \setminus X$ が S の Σ^1_n-集合.
- X は S の Δ^1_n-集合 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ X は S の Σ^1_1-集合かつ Π^1_n-集合.

射影集合 2

$\mathbb{R}$ の場合：

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \Sigma^1_1 \arrow[dr, phantom, sloped, "\supsetneq"] & & \Sigma^1_2 \arrow[dr, phantom, sloped, "\supsetneq"] & & \Sigma^1_3 & \\
\mathrm{Borel} = \Delta^1_1 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \Delta^1_2 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \Delta^1_3 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \cdots\cdots \\
 & \Pi^1_1 \arrow[ur, phantom, sloped, "\supsetneq"] & & \Pi^1_2 \arrow[ur, phantom, sloped, "\supsetneq"] & & \Pi^1_3 &
\end{tikzcd}
$$

Borel：ボレル集合全体,　　Γ : Γ-集合全体

- X が S の射影集合 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ ある自然数 n が存在し，X は S の Σ^1_n-集合.

射影集合のルベーグ可測性と完全集合の性質

ススリン・ルージンの定理（ZFC）

1. $\mathbb{R}$ のすべての Σ^1_1-集合は完全集合の性質を持つ.
2. $\mathbb{R}$ のすべての Σ^1_1-集合と Π^1_1-集合はルベーグ可測.

Π^1_1-集合は完全集合の性質を持つ? Δ^1_2-集合はルベーグ可測？
これらは ZFC では証明できない：

ゲ-デルの定理（ZFC + V = L）

1. 完全集合の性質を持たない $\mathbb{R}$ の Π^1_1-集合が存在する.
2. ルベーグ可測でない $\mathbb{R}$ の Δ^1_2-集合が存在する.

系（ZFC）

ZFC が無矛盾とする.

1. ZFC $\nvdash$ “すべての $\mathbb{R}$ の Π^1_1-集合は完全集合の性質を持つ”.
2. ZFC $\nvdash$ “すべての $\mathbb{R}$ の Δ^1_2-集合はルベーグ可測”.

到達不能基数公理と完全集合の性質とルベーグ可測性

ソロヴェイの定理（ZFC）

次は同値.

- $\mathbb{R}$ のすべての Π^1_1-集合が完全集合の性質を持つ.
- $\mathbb{R}$ のすべての Σ^1_2-集合が完全集合の性質を持つ.
- すべての $r \subseteq \omega$ に対して，$\omega_1{}^{\mathrm{V}}$ は $\mathrm{L}[r]$ で到達不能基数.

ソロヴェイ・シェラーの定理（ZFC）

1. すべての $r \subseteq \omega$ に対して $\omega_1{}^{\mathrm{V}}$ が $\mathrm{L}[r]$ で到達不能基数ならば，
   $\mathbb{R}$ のすべての Σ^1_2-集合と Π^1_2-集合はルベーグ可測.
2. $\mathbb{R}$ のすべての Σ^1_3-集合がルベーグ可測ならば，
   すべての $r \subseteq \omega$ に対して $\omega_1{}^{\mathrm{V}}$ は $\mathrm{L}[r]$ で到達不能基数.

Section 3

可測基数

フィルター

A を集合とする．

- 次をみたす $F \subseteq \mathcal{P}(A)$ を，A 上のフィルターと呼ぶ．
  - $A \in F$，$\emptyset \notin F$.
  - $X \in F$ かつ $X \subseteq Y \subseteq A$ ならば $Y \in F$.
  - $X, Y \in F$ ならば $X \cap Y \in F$.
- 次をみたす A 上のフィルター F を単項フィルターと呼ぶ．
  - ある $Y \subseteq A$ が存在し，$F = \{X \subseteq A \mid Y \subseteq X\}$.
- 基数 κ に対して，次をみたす A 上のフィルター F は κ-完備という．
  - $\mu < \kappa$ かつ $\{X_\alpha \mid \alpha < \mu\} \subseteq F$ ならば，$\bigcap_{\alpha<\mu} X_\alpha \in F$.

例

- $F = \{X \subseteq \omega \mid \omega \setminus X$ は有限 $\}$ は ω 上の ω-完備な非単項フィルター．
- $F = \{X \subseteq [0,1] \mid X$ はルベーグ測度 $1\}$ は $[0,1]$ 上の ω_1-完備な非単項フィルター．

可測基数

- 集合 A 上の次をみたすフィルター F を超フィルターと呼ぶ.
  - すべての $X \subseteq A$ に対して, $X \in F$ または $A \setminus X \in F$.
- ω 上に ω-完備な非単項超フィルターが存在する.
- κ が不可算基数で, κ 上に κ-完備な非単項超フィルターが存在するとき, κ を可測基数と呼ぶ.

定理（ZFC）

可測基数は到達不能基数.

可測基数公理（Meas）:「可測基数が存在する.」

可測基数と初等的埋め込み

- κ が可測基数であるとき，κ 上の κ-完備な非単項超フィルターによる V の超冪によって，推移的クラス M とクラス関数 $j : \mathrm{V} \to M$ が構成できて，次が示せる．
  - 《$\varphi(x_1, \ldots, x_n) : \mathcal{L}_{\in}$-論理式》
    $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{V}\,(\varphi^{\mathrm{V}}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^M(j(x_1), \ldots, j(x_n)))$
  - すべての $\alpha < \kappa$ に対して $j(\alpha) = \alpha$ で，$j(\kappa) > \kappa$.

  j を V から M への初等的埋め込みと呼び，κ は j の臨界点であるという．
- この初等的埋め込みを用いて，可測基数 κ の多くの性質が示される．
- このような初等的埋め込みの存在で，κ の可測性が特徴付けられる．

可測基数公理の無矛盾性の強さ

キースラー・タルスキの定理（ZFC）

κ が可測基数なら，κ より小さい到達不能基数が存在し，$\mathrm{V}_\kappa \models \overline{\mathrm{ZFC} + \mathrm{Inacc}}$.

証明：$j : \mathrm{V} \to M$ を κ が臨界点の初等的埋め込みとする．

- 前定理より κ は（V で）到達不能で，「κ は到達不能」は Π_1-論理式で表せるので，M でも κ は到達不能．
- $j(\kappa) > \kappa$ より，「$j(\kappa)$ より小さな到達不能基数が存在する」ことが M で成り立つ．
- j の初等性より，「κ より小さな到達不能基数が存在する」ことが V で成り立つ． □

系（メタ理論）

$\mathrm{ZFC} + \mathrm{Meas} \vdash \overline{\mathrm{Con}}(\overline{\mathrm{ZFC} + \mathrm{Inacc}})$.

つまり，ZFC + Meas は ZFC + Inacc より無矛盾性の強さが強い．

可測基数と L

スコットの定理（ZFC + V = L）

可測基数は存在しない．

証明：可測基数とし矛盾を導く． κ を最小の可測基数とし，$j : \mathrm{V} \to M$ を臨界点が κ の初等的埋め込みとする．

- j の初等性より $\mathrm{V} = \mathrm{L}$ が M で成り立ち，L の絶対性より $M = \mathrm{L} = \mathrm{V}$．
- κ は M で可測基数となり，「$j(\kappa)$ より小さな可測基数が存在する」ことが M で成り立つ．
- j の初等性より，「κ より小さな可測基数が存在する」ことが V で成り立ち，これは κ が最小の可測基数であったことに矛盾する． $\square$

何らかの公理系の無矛盾性から ZFC + Meas の無矛盾性を示すときは，L は使えない．この際は，L より大きな $\mathrm{L}[A]$ の形の内部モデルが用いられる．

可測基数と完全集合の性質とルベーグ可測性

可測基数公理のもとでは，スコットの定理より $\mathrm{V} \neq \mathrm{L}$.
さらに V と L がかなりかけ離れていることが示せる.

定理（ZFC + Meas）

すべての $r \subseteq \omega$ に対して，${\omega_1}^{\mathrm{V}}$ は $\mathrm{L}[r]$ で到達不能.

前に述べたことより，次の定理が得られる.

ソロヴェイの定理（ZFC + Meas）

1. すべての Σ^1_2-集合は完全集合の性質を持つ.
2. すべての Σ^1_2-集合と Π^1_2-集合はルベーグ可測.

ZFC + Meas のもとでは，ZFC とよりも，ひとつ上の階層の完全集合の性質とルベーグ可測性が示せる.

Section 4

より大きな巨大基数

より大きな巨大基数

- 可測基数は初等的埋め込みの存在で特徴付けられた．初等的埋め込みに付加条件を課すなどして，より大きな巨大基数が定義される．

  例：ウディン基数，超コンパクト基数，膨大基数

- それぞれの存在を主張する巨大基数公理が考えられる．

  例：ウディン基数公理（Woodin），超コンパクト基数公理（SC），膨大基数公理（Huge）

- ZFC に加えた公理系の無矛盾性の強さ：

  Inacc $<$ Meas $<$ Woodin $<$ SC $<$ Huge

決定公理

${}^{\omega}\omega = \{f \mid f : \omega \to \omega\}$: ベール空間,　$A \subseteq {}^{\omega}\omega$.

- ゲーム $G(A)$: プレイヤー I と II が交互に自然数を言い合う.

I	k_0		k_2		k_4		$\cdots$
II		k_1		k_3		k_5	$\cdots$

$\langle k_n \mid n \in \omega \rangle \in A$ なら I の勝ち．そうでなければ II の勝ち.

- A が決定的 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $G(A)$ で I または II が必勝法を持つ.

決定公理（AD）:「すべての $A \subseteq {}^{\omega}\omega$ は決定的.」
射影的決定公理（PD）:「すべての射影集合 $A \subseteq {}^{\omega}\omega$ は決定的.」

- （ZF + AD）$\mathbb{R}$ のすべての部分集合はルベーグ可測で完全集合の性質を持つ.
- （ZFC + PD）$\mathbb{R}$ のすべての射影集合はルベーグ可測で完全集合の性質を持つ.

ウディン基数と決定公理

ω-Woodin :「ω 個のウディン基数が存在する.」

マーティン・スティールの定理（ZFC + ω-Woodin）

PD が成り立つ.
特に, $\mathbb{R}$ のすべての射影集合はルベーグ可測で完全集合の性質を持つ.

ウディンの定理（メタ理論）

ZF + AD と ZFC + ω-Woodin は無矛盾等価.

超コンパクト基数

超コンパクト基数公理の無矛盾性から，プロパー強制公理（PFA）やマーティンの最大強制公理（MM）

バウムガートナーの定理（メタ理論）

ZFC + SC が無矛盾なら ZFC + PFA も無矛盾．

フォアマン・マギドア・シェラーの定理（メタ理論）

ZFC + SC が無矛盾なら ZFC + MM も無矛盾．

PFA や MM は連続体濃度を ω_2 に決めるなど，興味深い様々な帰結を持つ．

上の定理の逆方向の相対的無矛盾性も予想されているが，未解決．

- 何らかの公理系の無矛盾性から巨大基数公理（を ZFC に加えた公理系）の無矛盾性を示す際は，内部モデル理論が用いられる．
- 内部モデル理論は，弱い巨大基数公理に対するものから順に整備されていっている．
- ウディン基数公理や ω-Woodin に対する内部モデル理論は整備されている．
- 超コンパクト基数公理およびそれより強い巨大基数公理に対する内部モデル理論は未だ整備されていない．
- 何らかの公理系の無矛盾性から超コンパクト基数公理などの無矛盾性を示す手法は確立されておらず，これは巨大基数理論の今後の大きな課題．

おわり