ゲーデルの構成可能集合のユニヴァース II
構成可能集合のクラス L

酒井 拓史

神戸大学

2019 年 数学基礎論サマースクール

Section 1

1 回目の復習

$\mathcal{L}_\in$-論理式の相対化と絶対性

M, N：クラス，$M \subseteq N$.　φ：$\mathcal{L}_\in$-論理式

- φ^M：φ の量化子のスコープを M に制限したもの.「φ が M で成り立つ」
- $\varphi(\vec{x})$ は M, N で絶対的 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall \vec{x} \in M)\,(\varphi^M(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi^N(\vec{x}))$.
- M, N が推移的なら，Δ_0-論理式は M, N で絶対的.
- M を ZF の十分大きな有限部分をみたす推移的クラスとすると，絶対的なクラス関数から絶対的な整礎的関係について再帰的に定義されるクラス関数は，M で絶対的.

定理（メタ理論）

S, T を $\mathcal{L}_\in$-理論とし，M を閉クラスとする．すべての T の公理 φ に対して，$S \vdash \varphi^M$ とする．このとき，S が無矛盾ならば T が無矛盾.

反映原理

定理図式（ZF）《F : クラス，Γ : 有限個の $\mathcal{L}_\in$-論理式の集まり》

F を On 上のクラス関数で，次をみたすとする：

- $\alpha \leq \beta$ ならば $F(\alpha) \subseteq F(\beta)$.
- α が極限順序数なら $F(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} F(\beta)$.

また $N := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} F(\alpha)$ とする．

このとき，すべての順序数 α に対して，ある順序数 $\beta \geq \alpha$ が存在し，
Γ のすべての $\mathcal{L}_\in$-論理式が $F(\beta)$ と N で絶対的となる．

述語論理の集合論での形式化

- $\overline{\mathrm{Sym}} = \omega$： 述語論理の記号全体の形式化
- $\overline{\mathrm{Fml}} \subseteq {}^{<\omega}\overline{\mathrm{Sym}}$： $\mathcal{L}_{\in}$-論理式全体の形式化
  - ${}^{<\omega}X := \{s \mid (\exists n \in \omega)\, s : n \to X\}$ （X の要素の有限列全体）
- $\overline{\mathrm{Fml}}$ の要素を $\overline{\mathcal{L}_{\in}}$-論理式と呼ぶ.

M：集合

- $X \subseteq M$ は M で定義可能
  $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ X は $\langle M, \in\restriction M\rangle$ 上でパラメータを用いて $\overline{\mathcal{L}_{\in}}$-論理式で定義可能.
- $\mathcal{D}(M) := \{X \subseteq M \mid X$ は M 上で定義可能 $\}$. $\mathcal{D}(M)$ は集合.

定理図式（ZF）《$\varphi(x, z_1, \ldots, z_n)$：$\mathcal{L}_{\in}$-論理式》

M を集合とし，$z_1, \ldots, z_n \in M$ とすると，

$$\{x \in M \mid \varphi^M(x, z_1, \ldots, z_n)\} \in \mathcal{D}(M).$$

初等的部分構造とレーヴェンハイム・スコーレムの定理

$M \subseteq N$ である集合 M, N とする．
すべての $\overline{\mathcal{L}_\in}$-論理式の充足関係が $\langle M, \in\restriction M\rangle$ と $\langle N, \in\restriction N\rangle$ で同じになるとき，M は N の初等的部分構造であるといい，$M \prec N$ と表す．

定理図式（ZF）《$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$: $\mathcal{L}_\in$-論理式》

M, N を集合とし，$M \prec N$ とする．このとき，

$$(\forall x_1, \ldots, x_n \in M)\, \varphi^M(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^N(x_1, \ldots, x_n)$$

レーヴェンハイム・スコーレムの定理（ZFC）

N を集合とし，X を N の部分集合とする．このとき，
$X \subseteq M \prec N$ かつ $|M| = \max\{|X|, \aleph_0\}$ となる集合 M が存在する．

今日の講義は，集合論で議論するときは，特に指定しない限り ZF のもとで議論する．

Section 2

構成可能集合のクラス L

L の定義

L-階層 $\langle \mathrm{L}_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{On}\rangle$ を次のように再帰的に定める.

- $\mathrm{L}_0 := \emptyset$.
- $\mathrm{L}_{\alpha+1} := \mathcal{D}(\mathrm{L}_\alpha)$.
- α が極限順序数のとき, $\mathrm{L}_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{L}_\beta$.

クラス L を次のように定め, L の要素を**構成可能集合**と呼ぶ.

$$\mathrm{L} := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} \mathrm{L}_\alpha$$

次は On 上の帰納法で証明できる.

1. すべての $\alpha \in \mathrm{On}$ に対して L_α は推移的集合.
2. すべての $\alpha \in \mathrm{On}$ に対して, $\mathrm{On} \cap \mathrm{L}_\alpha = \alpha$.
3. $\alpha \leq \beta$ ならば $\mathrm{L}_\alpha \subseteq \mathrm{L}_\beta$.

(1) より, L は推移的クラス.

L が ZF をみたすこと

定理図式（ZF）《φ：ZF の公理》

φ が L で成り立つ．

証明：分出公理と置換公理以外は，1 回目に述べた十分条件を用いて容易に確かめられる．（パラメータなしの）分出公理のみ示す．

$\psi(x)$ を $\mathcal{L}_{\in}$-論理式とし，$y \in \mathrm{L}$ とする．次を示せばよい．

$$X := \{x \in y \mid \psi^{\mathrm{L}}(x)\} \in \mathrm{L}$$

$y \in \mathrm{L}_\alpha$ となる $\alpha \in \mathrm{On}$ を取る．反映原理より，$\beta \geq \alpha$ で，$\psi(x)$ が L_β と L で絶対的となるものが存在する．$y \subseteq \mathrm{L}_\beta$ に注意する．すると，

$$\begin{aligned} X =& \{x \in y \mid \psi^{\mathrm{L}_\beta}(x)\} \\ =& \{x \in \mathrm{L}_\beta \mid (x \in y \wedge \psi(x))^{\mathrm{L}_\beta}\} \in \mathcal{D}(\mathrm{L}_\beta) = \mathrm{L}_{\beta+1}\,. \end{aligned}$$

よって，$X \in \mathrm{L}$. □

L-階層の絶対性と L の最小性

M が推移的で ZF の十分大きな有限部分をみたせば，クラス関数 $\mathcal{D}$ と $\bigcup$ は M で絶対的．このことから次の定理が従う．

定理図式（ZF）《M：クラス》

M が推移的で ZF の十分大きな有限部分をみたせば，$\langle \mathrm{L}_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{On} \rangle$ は M で関数として絶対的.

上の定理より，次が得られる．

定理図式（ZF）《M：クラス》

M が推移的で ZF の十分大きな有限部分をみたすとする．このとき，$\mathrm{L}^M = \bigcup_{\alpha \in M \cap \mathrm{On}} \mathrm{L}_\alpha$．特に，$\mathrm{On} \subseteq M$ ならば，$\mathrm{L}^M = \mathrm{L}$.

系図式（ZF）《M：クラス》

M が推移的で ZF の十分大きな有限部分をみたし，$\mathrm{On} \subseteq M$ なら，$\mathrm{L} \subseteq M$.

公理 $\mathrm{V} = \mathrm{L}$

「$\forall x\,(x \in L)$」を表す $\mathcal{L}_{\in}$-文を $\mathrm{V} = \mathrm{L}$ と表す.

$\mathrm{L}^{\mathrm{L}} = \mathrm{L}$ であることより，L は $\mathrm{V} = \mathrm{L}$ をみたす.

L が選択公理をみたすこと

定理（ZF）

選択公理が L で成り立つ．

ZF + V = L のもとで，選択公理を示せばよい．以下，ZF + V = L で議論する．

- M を集合とすると，$\overline{\mathrm{Fml}} \times {}^{<\omega}M$ から $\mathcal{D}(M)$ への全射が存在する．
- M が整列可能集合ならば，$\overline{\mathrm{Fml}} \times {}^{<\omega}M$ は整列可能．
- M が整列可能集合ならば，$\mathcal{D}(M)$ も整列可能集合となる．

上のことを用いると，On 上の帰納法で，次が示せる．

- すべての $\alpha \in \mathrm{On}$ に対して，L_α は整列可能．

$\mathrm{V} = \mathrm{L}$ を仮定しているので，すべての集合 x に対して $x \in \mathrm{L}_\alpha$ となる $\alpha \in \mathrm{On}$ が存在する．このときさらに $x \subseteq \mathrm{L}_\alpha$ となるので，次がいえる．

- すべての集合は整列可能．（整列可能定理）

選択公理はこれから従う．

一般連続体仮説

一般連続体仮説（GCH）：
「すべての無限集合 X に対して，$X \precnsim Y \precnsim \mathcal{P}(X)$ となる集合 Y は存在しない.」

基数 κ の次の基数を κ^+ と表す．整列可能定理のもとでは,

$$\mathrm{GCH} \ \leftrightarrow\ \text{すべての無限基数 } \kappa \text{ に対して，} |\mathcal{P}(\kappa)| = \kappa^+ .$$

L が GCH をみたすこと 1

定理（ZF）

GCH が L で成り立つ．

ZF + V = L で GCH を示せばよい．ZF + V = L では，すでに整列可能定理が示せていることに注意．

次の 2 つの補題を示せばよい．

補題（ZF + V = L）

すべての無限順序数 α に対して，$|\mathrm{L}_\alpha| = |\alpha|$.

補題（ZF + V = L）

κ を無限基数とすると，$\mathcal{P}(\kappa) \subseteq \mathrm{L}_{\kappa^+}$.

L が GCH をみたすこと 2

補題（ZF + V = L）

すべての無限順序数 α に対して，$|\mathrm{L}_\alpha| = |\alpha|$.

証明のポイント：α を無限順序数とすると，次が示せる．

- $\overline{\mathrm{Fml}} \times {}^{<\omega}\mathrm{L}_\alpha$ から $\mathcal{D}(\mathrm{L}_\alpha) = \mathrm{L}_{\alpha+1}$ への全射が存在する．
- $|\mathrm{L}_{\alpha+1}| \leq |\overline{\mathrm{Fml}} \times {}^{<\omega}\mathrm{L}_\alpha| = |\mathrm{L}_\alpha|$.
- $\mathrm{L}_\alpha \subseteq \mathrm{L}_{\alpha+1}$ より $|\mathrm{L}_{\alpha+1}| = |\mathrm{L}_\alpha|$.

このことから，無限順序数 α に関する帰納法で，$|\mathrm{L}_\alpha| = |\alpha|$ が示せる． $\square$

L が GCH をみたすこと 3

補題（ZF + V = L）

κ を無限基数とすると，$\mathcal{P}(\kappa) \subseteq \mathrm{L}_{\kappa^+}$.

証明の概略：$x \subseteq \kappa$ とし，$x \in \mathrm{L}_{\kappa^+}$ を示す．$x \in \mathrm{L}_\alpha$ となる α を取る．

- ZF の有限部分 Γ を次をみたすように取る：
  - M が推移的クラスで Γ をみたせば，L-階層は M で関数として絶対的.
- 反映原理より，$\beta > \alpha$ で，Γ の各公理が L_β で絶対的となるものを取る．「$x \in \mathrm{L}_\alpha$」が L_β でも成り立つ．
- $\kappa \cup \{x, \alpha\} \subseteq N \prec \mathrm{L}_\beta$ かつ $|N| = \kappa$ となる N を取る．
- $\rho : N \to M$ を $\langle N, \in\restriction N\rangle$ の推移的収縮，$x' := \rho(x)$，$\alpha' := \rho(\alpha)$ とする．（$\rho(a) = \{\rho(b) \mid b \in a \cap N\}$）

L が GCH をみたすこと 4

- 「$x' \in \mathrm{L}_{\alpha'}$」が M で成り立つ．
  M は Γ もみたし，L-階層が M で絶対的なので，$x' \in \mathrm{L}_{\alpha'}$.
- $\alpha' \subseteq M$ なので，$|\alpha'| \leq |M| = |N| = \kappa$ となり，$\alpha' < \kappa^+$.
- $A := \kappa \cup \{x\} \subseteq N$ で，$x \subseteq \kappa$ より A は推移的.
  各 $a \in A$ に対して $a \cap N = a$ で，$\rho(a) = a$ が $\in$ に関する帰納法で示せる：

  $$\rho(a) = \{\rho(b) \mid b \in a \cap N\} = \{\rho(b) \mid b \in a\} = \{b \mid b \in a\} = a$$

  特に，$x' = \rho(x) = x$.
- よって $x \in \mathrm{L}_{\kappa^+}$. $\square$

ZFC + GCH の相対的無矛盾性

以上で次が示せた.

定理図式（ZF）《φ : ZFC + GCH の公理》

φ が L で成り立つ.

系（メタ理論）

ZF が無矛盾ならば ZFC + GCH も無矛盾.

クラス $\mathrm{L}[A]$

集合 A に対して，$\langle \mathrm{L}_\alpha[A] \mid \alpha \in \mathrm{On} \rangle$ を次のように定める．

- $\mathrm{L}_0[A] := \emptyset$.
- $\mathrm{L}_{\alpha+1}[A] :=$ 構造 $\langle \mathrm{L}_\alpha[A], \in \restriction \mathrm{L}_\alpha[A], A \cap \mathrm{L}_\alpha[A] \rangle$ で定義可能な $\mathrm{L}_\alpha[A]$ の部分集合全体.
- α が極限順序数のときは，$\mathrm{L}_\alpha[A] := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{L}_\beta[A]$.

$$\mathrm{L}[A] := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} \mathrm{L}_\alpha[A]$$

$\mathrm{L}[A]$ は ZFC の各公理をみたす推移的クラスで，$\mathrm{On} \cup \{A \cap \mathrm{L}[A]\} \in \mathrm{L}[A]$.
（特に，$A \subseteq \mathrm{On}$ ならば $A \in \mathrm{L}[A]$.）
また，$\mathrm{L}[A]$ はこのような最小のクラス.

L や $\mathrm{L}[A]$ など，On を含む推移的クラスで，ZF の各公理をみたすものを内部モデルと呼ぶ.