ゲーデルの構成可能集合のユニヴァース I
集合論のモデル

酒井 拓史

神戸大学

2019 年 数学基礎論サマースクール

Section 1

はじめに

講義内容

1. 集合論のモデル

   集合論の公理系の無矛盾性を議論するときには，（直感的には）集合論のモデルが用いられる．集合論のモデルについての基本事項を解説する．

2. 構成可能集合のユニヴァース L

   構成可能集合のクラス L を紹介し，ZF の下で L が ZFC と一般連続体仮説（GCH）をみたすことを示す．これから，「ZF が無矛盾ならば ZFC + GCH も無矛盾である」という相対的無矛盾性が帰結される．

3. L と巨大基数

   L と巨大基数および実数の集合は深く関連する．この関係について，初期に知られた事実を紹介する．

メタ理論と集合論

- メタ理論：述語論理を展開し，PA・ZF・ZFC などの公理系を俯瞰する立場
  - 公理系における証明可能性や公理系の無矛盾性はこの立場で議論される．
  - メタ理論での議論は形式化せず，"ナイーブ" に展開されることが多い．
  - メタ理論の定理の例：
    - 述語論理の完全性定理
    - PA の不完全性定理
    - 「ZF が無矛盾ならば ZFC も無矛盾である．」
- （公理的）集合論：ZF や ZFC などの公理系で議論する立場
  - 集合論の公理系の定理や補題は，本来すべて論理式で書かれるべき．また証明は述語論理の証明図であるべき．こうすると人は理解しずらいので，自然言語で書く．
  - ZF の定理の例：
    - 「すべての集合 x に対して，$x \precnapprox \mathcal{P}(x)$．」
    - 「すべての無限整列可能集合 y に対して，$|y \times y| = |y|$．」
- どちらの立場で議論されているか，区別に注意が必要．特に，「ものの集まり」や「有限・無限」など，両方に現れる概念は，区別に注意が必要．

3 種類の定理

メタ理論の定理は次のように提示する：

定理（メタ理論）

ZF が無矛盾なら ZFC + GCH も無矛盾.

集合論の定理は公理系を明記して次のように提示する.

定理（ZF）

すべての集合 x に対して，$x \precnapprox \mathcal{P}(x)$.

メタ理論の定理「すべての $\mathcal{L}_\in$-論理式 φ に対して ZF $\vdash \cdots$」は，次のように，集合論の定理図式として提示される.

定理（ZF）《$\varphi(x)$: $\mathcal{L}_\in$-論理式》

すべての集合 y に対して，$z = \{x \in y \mid \varphi(x)\}$ となる集合 z が存在する.

今日の講義では，集合論で議論するときは，基本的に ZF のもとで議論する．

Section 2

$\mathcal{L}_{\in}$-論理式の相対化と絶対性

$\mathcal{L}_\in$-論理式の相対化

M をクラスとし，φ を $\mathcal{L}_\in$-論理式とする．

- φ に現れる $\forall x$ を $(\forall x \in M)$ に変え，$\exists x$ を $(\exists x \in M)$ に変えた $\mathcal{L}_\in$-論理式を φ^M と表し，φ の M への相対化という．
  - $(\forall x \in M) \cdots$ は $\forall x\,(x \in M \to \cdots)$ のこと．
  - $(\exists x \in M) \cdots$ は $\exists x\,(x \in M \wedge \cdots)$ のこと．

例：$M = \{x \mid \psi(x)\}$，$\varphi \equiv \forall x \exists y\,(x \in y)$ とすると，

$$\begin{aligned}\varphi^M &\equiv (\forall x \in M)(\exists x \in M)\, x \in y \\ &\equiv \forall x(x \in M \to \exists y(y \in M \wedge x \in y)) \quad \equiv \forall x(\psi(x) \to \exists y(\psi(y) \wedge x \in y))\end{aligned}$$

- φ^M は直感的には，構造 $(M, \in\restriction M)$ で φ が成り立つことを意味する．φ^M が成り立つことを「φ が M で成り立つ」や「M は φ をみたす」という．
- φ と φ^{V} は同値（$\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi^{\mathrm{V}}$）．$\varphi$ が成り立つことを，「φ が V で成り立つ」ともいう．

相対化と無矛盾性

集合パラメータを用いずに定義されるクラス（つまり，自由変数が x のみの $\mathcal{L}_\in$-論理式 $\varphi(x)$ を用いて $\{x \mid \varphi(x)\}$ と表されるクラス）を，閉クラスという.

定理（メタ理論）

S, T を $\mathcal{L}_\in$-理論，M を閉クラスとする.
また，すべての T の公理 φ に対して，$S \vdash \varphi^M$ とする.
このとき，S が無矛盾ならば T も無矛盾.

証明：$M = \{x \mid \psi(x)\}$ とする.
S が無矛盾とする．完全性定理より，S のモデル (A, ε) が存在する.

$$B := \{a \in A \mid (A, \varepsilon) \models \psi(a)\}$$

とすると，仮定より $(B, \varepsilon \restriction B) \models T$．よって T も無矛盾. □

上の証明は，メタ理論における意味論的な証明．構文論的にも証明できる.

ZF の無矛盾性からの ZFC + GCH の無矛盾性証明

集合論で閉クラス L を定め，ZFC + GCH のすべての公理 φ に対して，
$\mathrm{ZF} \vdash \varphi^{\mathrm{L}}$ であることを示す.

$\Rightarrow$ 前定理より，ZF が無矛盾ならば ZFC + GCH も無矛盾.

$\mathcal{L}_{\in}$-論理式の絶対性

M, N をクラスとし，$M \subseteq N$ とする．$\varphi(x_1, \dots, x_n)$ を $\mathcal{L}_{\in}$-論理式とする．

- $\forall x_1, \dots, x_n \in M\,(\varphi^M(x_1, \dots, x_n) \to \varphi^N(x_1, \dots, x_n))$
  が成り立つとき，φ は M と N で上方向に絶対的であるという．
- $\forall x_1, \dots, x_n \in M\,(\varphi^M(x_1, \dots, x_n) \leftarrow \varphi^N(x_1, \dots, x_n))$
  が成り立つとき，φ は M と N で下方向に絶対的であるという．
- $\forall x_1, \dots, x_n \in M\,(\varphi^M(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi^N(x_1, \dots, x_n))$
  が成り立つとき，φ は M と N で絶対的であるという．
- M と V で絶対的であることを，M で絶対的という．

- φ に量化子がなければ，φ は M と N で絶対的.
- φ が M と N で絶対的なら，$\exists x_i\, \varphi$ は M と N で上方向に絶対的.
- φ が M と N で絶対的なら，$\forall x_i\, \varphi$ は M と N で下方向に絶対的.

Δ_0-論理式の推移的クラスでの絶対性 1

- $(\forall x \in y)$ または $(\exists x \in y)$ の形の量化子を有界量化子という．
  - $(\forall x \in y) \cdots$ は $\forall x\,(x \in y \to \cdots)$ のこと．
  - $(\exists x \in y) \cdots$ は $\exists x\,(x \in y \land \cdots)$ のこと．

  すべての量化子が有界量化子になっている $\mathcal{L}_{\in}$-論理式を Δ_0-論理式という．

例： $x \subseteq y$ を表す $\mathcal{L}_{\in}$-論理式は $(\forall z \in x)\, z \in y$ で，Δ_0-論理式．

- M がクラスで，すべての集合 x, y に対して $x \in y \in M \to x \in M$ であるとき，M は推移的であるという．

補題図式（ZF）《M：クラス，φ：Δ_0-論理式》

M が推移的ならば，φ は M で絶対的．

Δ_0-論理式の推移的クラスでの絶対性 2

次の補題から，Δ_0-論理式の複雑さに関する帰納法で，前ページの補題が示せる．

補題図式（ZF）《M：クラス，φ, ψ：$\mathcal{L}_\in$-論理式》

M が推移的で，φ と ψ が M で絶対的ならば，
$\varphi \wedge \psi$，$\varphi \vee \psi$，$\varphi \to \psi$，$\neg\varphi$，$(\exists x \in y)\,\varphi$，$(\forall x \in y)\,\varphi$ も M で絶対的．

証明：$(\exists x \in y)\,\varphi$ の絶対性のみ示す．簡単のため，φ の自由変数を x, y, z とし，

$$\sigma(y,z) \equiv (\exists x \in y)\,\varphi(x,y,z) \;\big(\equiv \exists x\,(x \in y \wedge \varphi(x,y,z))\big)$$

とする．$\sigma(y,z)$ は上方向に絶対的．下方向の絶対性を示す．

$y, z \in M$ を任意に取り，$\sigma^{\mathrm{V}}(y,z)$ とする．すると，$x \in y \wedge \varphi^{\mathrm{V}}(y,z)$ となる集合 x が存在する．M の推移性と $x \in M$ で，φ の絶対性より $\varphi^M(y,z)$.

つまり，$(\exists x \in M)(x \in y \wedge \varphi^M(y,z))$ が成り立ち，$\sigma^M(y,z)$ が成り立つ．□

Δ_0-論理式で表せること

Δ_0-論理式と論理的に同値な $\mathcal{L}_\in$-論理式も Δ_0-論理式と呼ぶ.
この意味での Δ_0-論理式も推移的クラスで絶対的となる.

次を表す $\mathcal{L}_\in$-論理式は Δ_0-論理式：

(1) x は空集合 (2) $x \subseteq y$ (3) $x = \{y, z\}$ (4) $x = \langle y, z \rangle$
(5) $x = \bigcup y$ (6) $x = y \cup z$ (7) $x = y \cap z$ (8) x は y 上の二項関係
(9) x は y 上の全順序 (10) x は y から z への写像（単射，全射）
(11) x は推移的 (12) x は順序数（後続型順序数，極限順序数）
(13) x は ω (14) x は自然数

例えば (1) を表す $\mathcal{L}_\in$-論理式は $\forall y\,(y \notin x)$ であるが,
これは $(\forall y \in x)\, y \neq y$ と論理的に同値.

Σ_1-論理式と Π_1-論理式

- Δ_0-論理式 φ を用いて $\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_m \, \varphi$ の形となる $\mathcal{L}_\in$-論理式を，
  Σ_1-論理式と呼ぶ．
  Σ_1-論理式に論理的に同値な $\mathcal{L}_\in$-論理式も，Σ_1-論理式と呼ぶ．
- Σ_1-論理式は推移的クラスで上方向に絶対的．

以下を表す $\mathcal{L}_\in$-論理式は Σ_1-論理式：

(1) $x \sim y$　(2) x は有限集合　(3) x は可算集合

- Δ_0-論理式 φ を用いて $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m \, \varphi$ の形となる $\mathcal{L}_\in$-論理式を，
  Π_1-論理式と呼ぶ．
  Π_1-論理式に論理的に同値な $\mathcal{L}_\in$-論理式も，Π_1-論理式と呼ぶ．
- Π_1-論理式は推移的クラスで下方向に絶対的．

以下を表す $\mathcal{L}_\in$-論理式は Π_1-論理式：

(1) x は無限集合　(2) x は不可算集合　(3) $x = \mathcal{P}(y)$

推移的クラスと ZF の公理 1

定理図式（ZF）《M : クラス》

M が推移的であるとする．

1. M は外延性公理と基礎公理をみたす．
2. $\emptyset \in M$ ならば，M は空集合公理をみたす．
3. $\omega \in M$ ならば，M は無限公理をみたす．
4. すべての $x, y \in M$ に対して $\{x, y\} \in M$ ならば，M は対集合公理をみたす．
5. すべての $x \in M$ に対して $\bigcup x \in M$ ならば，M は和集合公理をみたす．
6. すべての $x \in M$ に対して $\mathcal{P}(x) \cap M \in M$ なら，M は冪集合公理をみたす．

注意：ZF で議論しているときは，ZF の各公理は V で成り立つ．

証明：(1) 外延性公理と基礎公理は Π_1-文．V で成り立つので，M でも成り立つ．

(2) $\varphi(x)$ を $(\forall y \in x)\, y \neq y$ とすると，空集合公理は $\exists x\, \varphi(x)$ と同値．

これを M に相対化したものは $(\exists x \in M)\, \varphi^M(x)$．

$\varphi^{\mathrm{V}}(\emptyset)$ が成り立つが，φ は Δ_0 で絶対的なので，$\varphi^M(\emptyset)$ も成り立つ．

$\emptyset \in M$ なので，$(\exists x \in M)\, \varphi^M(x)$ が成り立つ．

□

推移的クラスと ZF の公理 2

定理図式（ZF）《M：クラス，$\varphi(x, z_1, \ldots, z_n)$：$\mathcal{L}_{\in}$-論理式》

M は推移的とし，すべての $w, z_1, \ldots, z_n \in M$ に対して

$$\{x \in w \mid \varphi^M(x, z_1, \ldots, z_n)\} \in M$$

とする．このとき，M は φ に対する分出公理をみたす．

定理図式（ZF）《M：クラス，$\varphi(x, y, z_1, \ldots, z_n)$：$\mathcal{L}_{\in}$-論理式》

M は推移的とし，すべての $w, z_1, \ldots, z_n \in M$ に対して

$$(\forall x \in w)(\exists! y \in M)\,\varphi^M(x, y, z_1, \ldots, z_n)$$
$$\quad \to \{y \in M \mid (\exists x \in w)\,\varphi^M(x, y, z_1, \ldots, z_n)\} \in M$$

とする．このとき，M は φ に対する置換公理をみたす．

簡単な相対的無矛盾性証明 1

定理図式（ZF）《ψ：無限公理以外の ZF の公理》

V_ω は ψ をみたす.

証明：V_ω は推移的なので，外延性公理と基礎公理をみたす.

$\emptyset \in \mathrm{V}_\omega$ で，すべての $x, y \in \mathrm{V}_\omega$ に対し，$\{x, y\}, \bigcup x, \mathcal{P}(x) \in \mathrm{V}_\omega$.
よって，V_ω は対集合公理・和集合公理・冪集合公理・分出公理図式をみたす.

V_ω が置換公理図式をみたすことを示すために，$w, z_1, \ldots, z_n \in \mathrm{V}_\omega$ とし，

$$(\forall x \in w)(\exists! y \in \mathrm{V}_\omega)\, \varphi^{\mathrm{V}_\omega}(x, y, z_1, \ldots, z_n)$$

とする．各 $x \in w$ に対して，$\varphi^{\mathrm{V}_\omega}(x, y, z_1, \ldots, z_n)$ となる唯一の y を y_x とする.
$Y := \{y_x \mid x \in w\} \in \mathrm{V}_\omega$ を示せばよい.

各 $x \in w$ に対して，$y_x \in \mathrm{V}_n$ となる最小の $n < \omega$ を n_x とする.
w は有限集合なので，$m := \sup_{x \in w} n_x$ とすると，$m < \omega$ で，$Y \subseteq \mathrm{V}_m$.
よって，$Y \in \mathrm{V}_{m+1}$ となり，$Y \in \mathrm{V}_\omega$. $\square$

簡単な相対的無矛盾性証明 2

V_ω を無限公理をみたさないことも ZF で証明できる．
これと前定理を合わせて，次が得られる．

系（メタ理論）

ZF が無矛盾ならば，(ZF − 無限公理 + 無限公理の否定) も無矛盾．
つまり，ZF が無矛盾ならば，ZF − 無限公理 $\nvdash$ 無限公理．

定義される集合の相対化と絶対性

$\mathcal{L}_\in$-論理式 $\forall y(y \notin x)$ をみたす唯一の集合 x を $\emptyset$ と表していた．
一般に，$\mathcal{L}_\in$-論理式 $\varphi(x)$ をみたす唯一の集合 x を B と表しているとき，
B を $\varphi(x)$ で定義される集合と呼ぶ．ω や ω_1 なども $\mathcal{L}_\in$-論理式で定義される．

B を $\mathcal{L}_\in$-論理式 $\varphi(x)$ で定義される集合とし，M をクラスとする．

- M が $\exists! x\, \varphi(x)$ をみたすとき，$(\exists! x \in M)\, \varphi^M(x)$ となる．
  $\varphi^M(x)$ となる唯一の $x \in M$ を B^M と表し，B の M への相対化と呼ぶ．
- $B^M = B$ であるとき，B は M で絶対的であるという．
- M が推移的で $\exists! x\, \varphi(x)$ をみたし，$\varphi(x)$ が Δ_0 ならば，B は M で絶対的．
  特に，M が推移的で ZF（の十分大きな有限部分）をみたすならば，
  $\emptyset$ と ω は M で絶対的．

クラスの相対化と絶対性

M をクラス，$z_1, \ldots, z_n \in M$ とし，X をクラス $\{x \mid \varphi(x, z_1, \ldots, z_n)\}$ とする．

- $X^M := \{x \in M \mid \varphi^M(x, z_1, \ldots, z_n)\}$ を X の M への相対化と呼ぶ．
- $X^M = X \cap M$ であるとき，X は M で絶対的であるという．
- M が推移的で，φ が Δ_0 なら，X は M で絶対的．
  特に，M が推移的なら，V と On は M で絶対的．

M をクラスとし，F をクラス X 上のクラス関数とする．

- F^M が $X \cap M$ 上のクラス関数で，すべての $x \in X \cap M$ に対して $F^M(x) = F(x)$ であるとき，F は M で関数として絶対的であるという．
- M が推移的で ZF（の十分大きな有限部分）をみたせば，
  $\bigcup$ と $\{\cdot, \cdot\}$ は M で絶対的．

クラス関数の代入の絶対性

絶対的な $\mathcal{L}_\in$-論理式に，絶対的なクラス関数を代入したものは絶対的.

定理図式（ZF）《$\varphi(y_1,\ldots,y_n)$: $\mathcal{L}_\in$-論理式，$M, F_1,\ldots,F_n$: クラス》

$F_1,\ldots,F_n$ をクラス関数とし，M で関数として絶対的とする．また $\varphi(y_1,\ldots,y_n)$ は M で絶対的とする．このとき，$\varphi(F_1(x_1),\ldots,F_n(x_n))$ は M で絶対的.

- $\varphi(F_1(x_1),\ldots,F_n(x_n))$ は，次のこと.

$$\exists y_1,\ldots,y_n\,(F_1(x_1)=y_1 \wedge \ldots \wedge F_n(x_n)=y_n \wedge \varphi(y_1,\ldots,y_n))$$

- 絶対的な $\mathcal{L}_\in$-論理式に，絶対的に定義される集合を代入したものも絶対的.

再帰的定義の絶対性

絶対的な整礎的関係と絶対的なクラス関数から再帰的に定義されるクラス関数は絶対的.

定理図式（ZF）《M, G, X, R : クラス》

次を仮定する.

1. M は ZF の十分大きな有限部分をみたす推移的クラス.
2. R は X 上の集合状かつ整礎的な二項関係で, X, R は M で絶対的. また, すべての $x \in X \cap M$ に対して $\mathrm{pred}_{X,R}(x) \in M$.
3. G は $X \times \mathrm{V}$ 上のクラス関数で, M で関数として絶対的.

このとき, G から R に関して再帰的に定義される X 上のクラス関数 F は, M で関数として絶対的.

- G, X, R が具体的に与えられれば, (1) の "ZF の十分大きな有限部分" は具体的に書ける. また, これは M には依存しない.
- X が V または On で, R が $\in$ なら, X, R は条件 (2) をみたす.

反映原理

定理図式（ZF）《F : クラス，Γ : 有限個の $\mathcal{L}_\in$-論理式の集まり》

F を On 上のクラス関数で，次をみたすとする：

- $\alpha \leq \beta$ ならば $F(\alpha) \subseteq F(\beta)$.
- α が極限順序数なら $F(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} F(\beta)$.

また $N := \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} F(\alpha)$ とする．

このとき，すべての順序数 α に対して，ある順序数 $\beta \geq \alpha$ が存在し，
Γ のすべての $\mathcal{L}_\in$-論理式が $F(\beta)$ と N で絶対的となる．

F を累積階層 $\langle \mathrm{V}_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{On}\rangle$ とすると，F は定理の条件をみたし，$N = \mathrm{V}$.
よって次が得られる．

系図式（ZF）《Γ : 有限個の $\mathcal{L}_\in$-論理式の集まり》

順序数 β で，Γ のすべての $\mathcal{L}_\in$-論理式が V_β で絶対的となるものが存在する．

これは，真のクラス V の性質を "反映" する集合（V_β）の存在を意味する．

Section 3

述語論理の集合論での形式化

述語論理を集合論で形式化する理由

「すべての $\mathcal{L}_\in$-論理式 φ に対して $\cdots$」や「ある $\mathcal{L}_\in$-論理式 φ が存在して $\cdots$」は，一般にひとつの $\mathcal{L}_\in$-論理式で書けない．述語論理を集合論で形式化すると，これに近いことがひとつの $\mathcal{L}_\in$-論理式で書けるようになる．

L の定義の概略：

- 累積階層 $\langle \mathrm{V}_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{On} \rangle$ を変更して L-階層 $\langle \mathrm{L}_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{On} \rangle$ を定義し，$\mathrm{L} := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} \mathrm{L}_\alpha$ とする．
- $\mathrm{L}_{\alpha+1} := \{ X \subseteq \mathrm{L}_\alpha \mid X$ は構造 $\langle \mathrm{L}_\beta, \in \restriction \mathrm{L}_\alpha \rangle$ で定義可能 $\}$

$X \subseteq \mathrm{L}_\alpha$ に対して，

X は $\langle \mathrm{L}_\alpha, \in \restriction \mathrm{L}_\alpha \rangle$ で定義可能

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ ある $\mathcal{L}_\in$-論理式 $\varphi(x)$ が存在し，$X = \{ x \in \mathrm{L}_\alpha \mid \varphi^{\mathrm{L}_\alpha}(x) \}$

と定めると，$\mathrm{L}_{\alpha+1}$ は集合とならない（クラスですらない）．

$\Rightarrow$ 集合論で形式化された論理式による定義可能性を考える．

構文論の形式化の概略

$\mathcal{L}_\in$ に関わる構文論を形式化する．

- メタ理論の $\mathcal{L}_\in$ で用いられる記号に，適当に集合を割り振る．
- 述語論理の構文論は基本的に記号列に関すること．
  これらは対応する集合列に関するものに形式化される．
- メタ理論の述語論理の各オブジェクト B に対して，
  B を集合論で形式化したものを $\overline{B}$ と表す．

構文論の形式化１：記号と記号列の形式化

- メタ理論の記号 $\wedge, \vee, \to, \cdots$ を，次のように集合論の自然数に割り振る：

$$\overline{\wedge} := 0, \quad \overline{\vee} := 1, \quad \overline{\to} := 2, \quad \overline{\neg} := 3, \quad \overline{\exists} := 4, \quad \overline{\forall} := 5,$$
$$\overline{)} := 6, \quad \overline{(} := 7, \quad \overline{=} := 8, \quad \overline{\in} := 9,$$
$$\overline{x_0} := 10, \quad \overline{x_1} := 11, \quad \overline{x_2} := 12, \quad \cdots\cdots$$

- $\overline{\mathrm{Sym}} := \omega$ （メタ理論の記号全体を，集合論で形式化したもの）
- $\overline{\mathrm{Var}} := \omega \setminus 10$ （メタ理論の変数記号の全体を，集合論で形式化したもの）
- $\overline{\mathrm{Seq}} := \{s \mid (\exists n \in \omega)\, s : n \to \overline{\mathrm{Sym}}\}$
  （メタ理論の記号の有限列全体を，集合論で形式化したもの）
  - $s, t \in \overline{\mathrm{Seq}}$ に対して，s の後に t をつなげてできる列を $s\,t$ と表す．
  - s が b だけからなる長さ 1 の列のとき，$s\,t$ を $b\,t$ と表す．

構文論の形式化２：論理式の形式化

- 集合論で，$n \in \omega$ に対して $\overline{\mathrm{Fml}}_n \subseteq \overline{\mathrm{Seq}}$ を再帰的に次のように定める．

$$\overline{\mathrm{Fml}}_0 := \{u \,\overline{=}\, v\,,\ u \,\overline{\in}\, v \mid u, v \in \overline{\mathrm{Var}}\}$$

$$\overline{\mathrm{Fml}}_{n+1} := \{p \,\overline{\wedge}\, q\,,\ p \,\overline{\vee}\, q\,,\ p \,\overline{\rightarrow}\, q\,,\ \overline{\neg} p\,,\ \overline{\exists} u\, p\,,\ \overline{\forall} u\, p \mid p, q \in \overline{\mathrm{Fml}}_n\,,\ u \in \overline{\mathrm{Var}}\}$$

- $\overline{\mathrm{Fml}} := \bigcup_{n \in \omega} \overline{\mathrm{Fml}}_n$　（$\mathcal{L}_\in$-論理式全体の，集合論での形式化）
  $\overline{\mathrm{Fml}}$ の要素を $\overline{\mathcal{L}_\in}$-論理式と呼ぶ．
- 「すべての $p \in \overline{\mathrm{Fml}}$ に対して $\cdots$」や「ある $p \in \overline{\mathrm{Fml}}$ が存在して $\cdots$」が，ひとつの $\mathcal{L}_\in$-論理式で書ける．
- メタ理論の $\mathcal{L}_\in$-論理式 φ に対して，対応する $\overline{\varphi} \in \overline{\mathrm{Fml}}$ が定義される．
  例えば，$\overline{x_0 \in x_1}$ は次のような $p \in \overline{\mathrm{Fml}}$：

$$\mathrm{dom}(p) = 3,\quad p(0) = \overline{x_0} = 10,\quad p(1) = \overline{\in} = 9,\quad p(2) = \overline{x_1} = 11$$

構文論の形式化 3

- $\overline{\mathrm{Fml}}$ 上の次の関係 $\lhd$ は整礎的．$\lhd$ についての帰納法・再帰的定義を，$\overline{\mathcal{L}_\in}$-論理式の複雑さに関する帰納法・再帰的定義という．

$$p \lhd q \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} p \text{ は } q \text{ の部分列} \wedge p \neq q$$

- $p \in \overline{\mathrm{Fml}}$ に対して，p の自由変数の集合 $\overline{\mathrm{FV}}(p)$ が定義される．
- $\overline{\mathrm{Sent}} := \{p \in \overline{\mathrm{Fml}} \mid \overline{\mathrm{FV}}(p) = \emptyset\}$．　（$\mathcal{L}_\in$-文全体の集合論での形式化）
- $T \subseteq \overline{\mathrm{Sent}}$ である集合 T を $\overline{\mathcal{L}_\in}$-理論と呼ぶ．
- ZF や ZFC などの $\mathcal{L}_\in$-理論の定義を集合論で形式化して，$\overline{\mathcal{L}_\in}$-理論 $\overline{\mathrm{ZF}}$ や $\overline{\mathrm{ZFC}}$ が定義される．

意味論の形式化 1

- M が集合であるとき，$\langle M, \in\restriction M\rangle$ を $\overline{\mathcal{L}_\in}$-構造と呼ぶ．
- 集合 M，$p \in \overline{\mathrm{Fml}}$，$f : \overline{\mathrm{FV}}(p) \to M$ に対して，

  「p の自由変数に f によって M の要素を代入したものの $\langle M, \in\restriction M\rangle$ での真理値」

  を表す関数 $\overline{\mathrm{val}}(M, p, f) \in \{0, 1\}$ が，p の複雑さで再帰的に定義される．
  - $\overline{\mathrm{val}}(M, u \overline{\in} v, f) = 1 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(u) \in f(v)$.
  - $\overline{\mathrm{val}}(M, p \overline{\wedge} q, f) = 1 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \overline{\mathrm{val}}(M, p, f) = 1 \wedge \overline{\mathrm{val}}(M, q, f) = 1$.
  - $\overline{\mathrm{val}}(M, \overline{\neg} p, f) = 1 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \overline{\mathrm{val}}(M, p, f) = 0$.

  $\vdots$
- $\overline{\mathrm{val}}(M, p, f) = 1$ であることを $M \models p(f)$ と表し，「M で $p(f)$ が成り立つ」や「M は $p(f)$ をみたす」という．
  $p \in \overline{\mathrm{Sent}}$ で $f = \emptyset$ のときは，$p(f)$ を p と表す．
- 「$M \models p(f)$」は M, p, f を変数とするひとつの $\mathcal{L}_\in$-論理式で表せる．

意味論の形式化 2

M を集合とする.

- $\overline{\mathcal{L}_\in}$-理論 T に対して,

  $$M \models T \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall p \in T)\, M \models p\,.$$

  このとき,「M は T をみたす」や「M は T のモデルである」という.

- X を M の部分集合とする. ある $p \in \overline{\mathrm{Fml}}$ と $u \in \overline{\mathrm{FV}}(p)$ と $f : \overline{\mathrm{FV}}(p) \setminus \{u\} \to M$ が存在し,

  $$X = \{x \in M \mid M \models p(f \cup \{\langle u, x\rangle\})\}$$

  となるとき, X は M の定義可能な部分集合であるという.

- $\mathcal{D}(M) := \{X \subseteq M \mid X$ は M の定義可能な部分集合 $\}$.
  $\mathcal{D}(M)$ は集合となる.

$\mathcal{L}_\in$-論理式の相対化と $\overline{\mathcal{L}_\in}$-論理式の充足 1

$\mathcal{L}_\in$-論理式の相対化と $\overline{\mathcal{L}_\in}$-論理式の充足は，次の意味で同じ．

定理図式（ZF）《$\varphi(x_1, \dots, x_n)$: $\mathcal{L}_\in$-論理式》

M を集合とし，$y_1, \dots, y_n \in M$ とする．このとき，$\overline{\mathrm{FV}}(\overline{\varphi}) = \{\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}\}$ 上の写像 f を $f(\overline{x_1}) = y_1$, ... , $f(\overline{x_n}) = y_n$ により定めると，

$$\varphi^M(y_1, \dots, y_n) \leftrightarrow M \models \overline{\varphi}(f)$$

系図式（ZF）《$\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$: $\mathcal{L}_\in$-論理式》

M を集合とし，$y_1, \dots, y_n \in M$ とすると，

$$\{y \in M \mid \varphi^M(y, y_1, \dots, y_n)\} \in \mathcal{D}(M) .$$

$\mathcal{L}_\in$-論理式の相対化と $\overline{\mathcal{L}_\in}$-論理式の充足 2

$\mathcal{L}_\in$-論理式の相対化と $\overline{\mathcal{L}_\in}$-論理式の充足の相違点：

- $\mathcal{L}_\in$-論理式の相対化は，真のクラスである M に対してもできるが，（メタ理論の意味で）無限個の $\mathcal{L}_\in$-論理式の相対化はひとつの $\mathcal{L}_\in$-論理式で書けない．
- $\overline{\mathcal{L}_\in}$-論理式の充足関係は，集合である M に対してのみ定義されるが，（集合論の意味で）無限個の $\overline{\mathcal{L}_\in}$-論理式の充足関係もひとつの $\mathcal{L}_\in$-論理式で書ける．

形式化された諸概念の絶対性

N を ZF の十分大きな有限部分をみたす推移的クラスとする.

- $\overline{\mathrm{Sym}}, \overline{\mathrm{Var}}, \overline{\mathrm{Seq}}, \overline{\mathrm{Fml}}, \overline{\mathrm{ZF}}$ などの，構文論の形式化で定義された集合は N で絶対的.
- 「$M \models p(f)$」を表す $\mathcal{L}_\in$-論理式は N で絶対的.
- クラス関数 $\mathcal{D}$ は，N で関数として絶対的.

初等的部分構造とレーヴェンハイム・スコーレムの定理

M, N を集合とし，$M \subseteq N$ とする．

$$M \prec N \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall p \in \overline{\mathrm{Fml}})(\forall f : \overline{\mathrm{FV}}(p) \to M)\ M \models p(f) \leftrightarrow N \models p(f)$$

$M \prec N$ であるとき，M は N の初等的部分構造であるという．

定理図式（ZF）《$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$: $\mathcal{L}_\in$-論理式》

M, N を集合とし，$M \prec N$ とすると，すべての $y_1, \ldots, y_n \in M$ に対して，

$$\varphi^M(y_1, \ldots, y_n) \leftrightarrow \varphi^N(y_1, \ldots, y_n).$$

次の定理はレーヴェンハイム・スコーレムの定理と呼ばれる．

定理（ZFC）

N を集合とし，$X \subseteq N$ とする．このとき，N の初等的部分構造 M で，$X \subseteq M$ かつ $|M| = \max\{\aleph_0, |X|\}$ となるものが存在する．