公理的集合論の基礎

酒井 拓史

神戸大学

2019 年 数学基礎論サマースクール

Section 1

公理的集合論の注意点

公理的集合論の枠組み

公理的集合論は述語論理の枠組みのもとで展開される．

- 集合論の言語 $\mathcal{L}_{\in}$： 非論理記号は二項関係記号 $\in$ のみ
- 集合論の公理系： ZF や ZFC など
- 公理的集合論の考察対象：
  遺伝的集合の集まりとそれら間の要素関係（$\in$-関係）
  - 遺伝的集合： 要素もそのまた要素もすべて集合である集合
    例： $\emptyset$，$\{\emptyset\}$，$\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
  - 変数記号は遺伝的集合を指し，量化子のスコープは遺伝的集合全体．
  - 自然数・実数・関数・位相空間など，数学諸概念が遺伝的集合を用いて表現（コード）され，様々な数学が公理的集合論の枠組みの中で展開される．
  - 遺伝的集合を単に集合と呼ぶ．

公理的集合論の定理と証明

- 集合論の公理系の定理はすべて $\mathcal{L}_{\in}$-論理式で書かれるべきで，その証明は述語論理の証明図であるべき．ただし，これでは（人が）理解しづらいので，自然言語に翻訳したものを書く．
- 定理は，証明される公理系とともに，次のように提示する．

定理（ZF）

すべての x に対して，$x \precnsim \mathcal{P}(x)$.

- すべての $\mathcal{L}_{\in}$-論理式 φ に対して，公理系 T で $\cdots$ が証明されるとき（“$\cdots$” は φ を用いた主張），$\cdots$ を T の定理図式と呼ぶ．
これを次のように書き表す．

定理図式（ZF）《$\varphi(x)$: $\mathcal{L}_{\in}$-論理式》

すべての y に対して，$z = \{x \in y \mid \varphi(x)\}$ となる z が存在する．

今日の講義では，ZF のもとで議論する．

Section 2

公理的集合論の基礎概念

部分集合と空集合

- $x \subseteq y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall z\,(z \in x \to z \in y)$.
  (「$x \subseteq y$」を $\mathcal{L}_\in$-論理式 $\forall z\,(z \in x \to z \in y)$ の略記とみなす.)
- 空集合公理より，$\forall y\,(y \notin x)$ となる集合 x が存在し，外延性公理より，このような x はただ一つ．この集合 x を $\emptyset$ と表し，空集合と呼ぶ.
  $\mathcal{L}_\in$-論理式 $\varphi(x)$ に対して，$\varphi(\emptyset)$ は次の論理式のこととする.
  $$\exists x\,(\forall y\,(y \notin x) \wedge \varphi(x))$$
- 一般に，$\mathcal{L}_\in$-論理式 $\psi(x)$ をみたす集合 x がただひとつ存在し，その x を B と表しているとする．このとき，$\mathcal{L}_\in$-論理式 $\varphi(x)$ に対して，
  $$\varphi(B) \equiv \exists x\,(\psi(x) \wedge \varphi(x)).$$

集合の記法

$\varphi(u, u_1, \ldots, u_n)$ を $\mathcal{L}_\in$-論理式とし，$z_1, \ldots, z_n$ を集合とする．

- $x = \{w \mid \varphi(w, z_1, \ldots, z_n)\} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall w\,(w \in x \leftrightarrow \varphi(w, z_1, \ldots, z_n))$
  これは「x は $\varphi(w, z_1, \ldots, z_n)$ をみたす w をすべて集めたものである」ことを意味する．外延性公理より，このような集合 x は高々 1 つ．
  このような集合 x が存在するとき，x を $\{w \mid \varphi(w, z_1, \ldots, z_n)\}$ と表す．
- y を集合とすると，分出公理より

$$x = \{w \mid w \in y \wedge \varphi(w, z_1, \ldots, z_n)\}$$

  をみたす集合 x が存在する．x を $\{w \in y \mid \varphi(w, z_1, \ldots, z_n)\}$ とも表す．

クラス

$\varphi(u, u_1, \ldots, u_n)$ を $\mathcal{L}_\in$-論理式とし，$z_1, \ldots, z_n$ を集合とする．
一般には $x = \{w \mid \varphi(w, z_1, \ldots, z_n)\}$ となる集合 x は存在しない．

定理（ZF）

$x = \{w \mid w \notin w\}$ となる集合 x は存在しない．($\neg\exists x \forall w\,(w \in x \leftrightarrow \neg w \in w)$)

証明：$x = \{w \mid w \notin w\}$ とすると，$x \in x \leftrightarrow x \notin x$ となり矛盾する． □

- 集合論では $\varphi(w, z_1, \ldots, z_n)$ をみたす集合 w の集まり $\{w \mid \varphi(w, z_1, \ldots, z_n)\}$ も考える．このような集まりを一般にクラスと呼ぶ．
- $x = \{w \mid \varphi(w, z_1, \ldots, z_n)\}$ となる集合 x が存在するとき，$\{w \mid \varphi(w, z_1, \ldots, z_n)\}$ は集合であるという．そうでないときは，真のクラスであるという．

クラスの取り扱いについては，また後で．

様々な集合

x, y を集合とする．ZF のもとで以下は集合となる．

- $\{x, y\} := \{w \mid w = x \vee w = y\}$.　（$x, y$ の対集合）（$\{x, y\} = \{y, x\}$）
  $\langle x, y\rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$.　（$x, y$ の順序対）（$\langle x, y\rangle \neq \langle y, x\rangle$）
- $\bigcup x := \{w \mid \exists z\,(z \in x \wedge w \in z)\}$.　（$x$ の和集合）
  $x \cup y := \bigcup\{x, y\} = \{w \mid w \in x \vee w \in y\}$.　（$x, y$ の和集合）
- $x \cap y := \{w \mid w \in x \wedge w \in y\}$.　（$x, y$ の共通部分）
- $x \setminus y := \{w \in x \mid w \notin y\}$.　（$x, y$ の差集合）
- $x \times y := \{\langle u, v\rangle \mid u \in x \wedge v \in y\} = \{w \mid \exists u, v\,(u \in x \wedge v \in y \wedge w = \langle u, v\rangle)\}$.
  （x, y の積集合）
- $\mathcal{P}(x) := \{w \mid w \subseteq x\}$.　（$x$ の冪集合）

$x_1, x_2, \dots, x_n$ を集合とする．次も ZF のもとで集合となる．

- $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} := \{w \mid w = x_1 \lor w = x_2 \lor \cdots \lor w = x_n\}$.
- $\langle x_1, x_2, \dots, x_n\rangle := \langle\langle \dots \langle\langle x_1, x_2\rangle, x_3\rangle \dots\rangle, x_n\rangle$.
- $$x_1 \cup x_2 \cup \cdots \cup x_n := (\dots((x_1 \cup x_2) \cup x_3) \dots) \cup x_n = \{w \mid w \in x_1 \lor w \in x_2 \lor \cdots \lor w \in x_n\}.$$
- $$x_1 \cap x_2 \cap \cdots \cap x_n := (\dots((x_1 \cap x_2) \cap x_3) \dots) \cap x_n = \{w \mid w \in x_1 \land w \in x_2 \land \cdots \land w \in x_n\}.$$
- $$x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n := (\dots((x_1 \times x_2) \times x_3) \dots) \times x_n = \{\langle u_1, u_2, \dots, u_n\rangle \mid u_1 \in x_1 \land u_2 \in x_2 \land \cdots \land u_n \in x_n\}.$$

関係

- 集合 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に対して，$R \subseteq X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ である集合 R を，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 上の n-項関係と呼ぶ．$X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$ のときは，X 上の n-項関係という．
- R を二項関係としたとき，$\langle x, y \rangle \in R$ を $x\,R\,y$ と表す．
- 次をみたす集合 X 上の二項関係 R を，X 上の（狭義）全順序と呼ぶ．
  - $(\forall x \in X)\ \neg x\,R\,x$．（非反射律）
  - $(\forall x, y, z \in X)\ (x\,R\,y \wedge y\,R\,z) \to x\,R\,z$．（推移律）
  - $(\forall x, y \in X)\ x\,R\,y \vee x = y \vee y\,R\,x$．（三分律）

  R が X 上の全順序であるとき，$\langle X, R \rangle$ を全順序集合と呼ぶ．
- 半順序や同値関係なども自然に定義できる．

写像（関数） 1

- f が集合 X, Y 上の二項関係で，

$$(\forall x \in X)(\exists! y \in Y)\, \langle x, y\rangle \in f$$

  であるとき，f を X から Y への写像または関数といい，$f : X \to Y$ と表す．

$f : X \to Y$ とする．

- $x \in X$ に対して，$\langle x, y\rangle \in f$ となるただ一つの y を $f(x)$ と表す．
- 各 $f(x)$ を y_x と表し，f を $\langle y_x \mid x \in X\rangle$ と表すこともある．
  このとき，f を X 上の列と呼ぶ．
- $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ であるとき，f は n-変数関数であるといい，
  $f(\langle x_1, \ldots, x_n\rangle)$ を $f(x_1, \ldots, x_n)$ と表す．
- X を f の定義域と呼び，$\mathrm{dom}(f)$ と表す．
  $\mathrm{rng}(f) := \{f(x) \mid x \in X\} = \{y \in Y \mid (\exists x \in X)\, \langle x, y\rangle \in f\}$ と定め，
  f の値域と呼ぶ．
- $\mathrm{rng}(f) = Y$ のとき，f は全射であるという．また，すべての異なる $x_1, x_2 \in X$ に対して $f(x_1) \neq f(x_2)$ であるとき，f を単射であるという．

写像（関数） 2

f が集合 X から何らかの集合 Y への写像であるとき，f を X 上の写像という．
X 上の写像を定めるには，各 $x \in X$ に対応する y を $\mathcal{L}_\in$-論理式で定めればよい．

補題図式（ZF）《$\varphi(x, y, z_1, \ldots, z_n)$：$\mathcal{L}_\in$-論理式》

$X, z_1, \ldots, z_n$ を集合とし，次が成り立つとする．

$$(\forall x \in X)(\exists! y)\, \varphi(x, y, z_1, \ldots, z_n)$$

このとき，X 上の写像 f で，すべての $x \in X$ に対して $\varphi(x, f(x), z_1, \ldots, z_n)$ となるものが存在する．

証明：置換公理より $Y := \{y \mid (\exists x \in X)\, \varphi(x, y, z_1, \ldots, z_n)\}$ は集合．
分出公理より $f := \{\langle x, y\rangle \in X \times Y \mid \varphi(x, y, z_1, \ldots, z_n)\}$ は集合で，
この f が望みのものとなる． □

集合の濃度

X, Y を集合とする．

- $X \sim Y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ X から Y への全単射が存在する．
  $X \sim Y$ であるとき，X と Y は対等であるという．
- $X \precsim Y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ X から Y への単射が存在する．
- $X \precnsim Y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $X \precsim Y$ かつ $X \not\sim Y$.

カントールの定理（ZF）

すべての集合 X に対して，$X \precnsim \mathcal{P}(X)$.

ベルンシュタイン・シュレーダーの定理（ZF）

すべての集合 X, Y に対して，$X \precsim Y$ かつ $Y \precsim X$ ならば $X \sim Y$.

Section 3

帰納法と再帰的定義

整礎的関係

R を集合 X 上の二項関係とする．

- 空でないすべての $X' \subseteq X$ が R についての極小元を持つとき，R を X 上の**整礎的関係**という．
  - x が X' の R についての**極小元** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $x \in X'$ かつ $(\forall x' \in X) \neg x' \mathrel{R} x$.
- X 上の整礎的な（狭義）全順序を，X 上の**整列順序**と呼ぶ.
- $x \in X$ に対して，$\mathrm{pred}_{X,R}(x) := \{x' \in X \mid x' \mathrel{R} x\}$.

注意：$x \mathrel{R} x$ となる $x \in X$ が存在すれば，$\{x\} \subseteq X$ は R についての極小元を持たない．よって，整礎的ならば非反射的.

基礎公理により，すべての集合 X に対して，

$$\in\restriction X := \{\langle x, y\rangle \in X \times X \mid x \in y\}$$

は X 上の整礎的な二項関係.

帰納法原理

定理図式（ZF）《$\varphi(x, z_1, \ldots, z_n)$：$\mathcal{L}_\in$-論理式》

$z_1, \ldots, z_n$ を集合とし，R を集合 X 上の整礎的な二項関係とする．
また，すべての $x \in X$ に対して，

$$((\forall x' \, R \, x) \, \varphi(x', z_1, \ldots, z_n)) \to \varphi(x, z_1, \ldots, z_n)$$

とする．このとき，すべての $x \in X$ に対して $\varphi(x, z_1, \ldots, z_n)$ が成り立つ．

証明： $X' := \{x \in X \mid \neg\varphi(x, z_1, \ldots, z_n)\} = \emptyset$ を示せばよい．
$X' \neq \emptyset$ とする．X' の R に関する極小元 x を取る．$x' \, R \, x$ なら $x' \notin X'$ なので，

$$(\forall x' \, R \, x) \, \varphi(x', z_1, \ldots, z_n) \, .$$

すると，定理の仮定より $\varphi(x, z_1, \ldots, z_n)$．これは $x \in X'$ に矛盾する． $\square$

再帰原理

R を集合 X 上の整礎的関係とする．
X 上の写像 f を定めるには，各 $x \in X$ に対して，「x と $f \restriction \mathrm{pred}_{X,R}(x)$ から $f(x)$ を定める方法」を $\mathcal{L}_{\in}$-論理式で書けばよい．

定理図式（ZF）《$\psi(x_1, x_2, y, z_1, \ldots, z_n)$: $\mathcal{L}_{\in}$-論理式》

$z_1, \ldots, z_n$ を集合とし，R を集合 X 上の整礎的な二項関係とする．
また，すべての $x \in X$ と，$\mathrm{pred}_{X,R}(x)$ 上のすべての写像 g に対して，

$$\exists! y\, \psi(x, g, y, z_1, \ldots, z_n)$$

とする．このとき，次をみたす X 上の写像 f がただ一つ存在する．

$$(\forall x \in X)\, \psi(x\,,\, f \restriction \mathrm{pred}_{X,R}(x)\,,\, f(x)\,,\, z_1, \ldots, z_n)\,.$$

推移的集合と推移的収縮

- 集合 X が推移的 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\forall x, y\,(y \in x \in X \to y \in X)$.

R を集合 X 上の整礎的関係とする.

- X 上の関数 ρ を次のように再帰的に定める.

$$\rho(x) := \mathrm{rng}(\rho \restriction \mathrm{pred}_{X,R}(x)) = \{\rho(x') \mid x' \mathrel{R} x\}\,.$$

  $Y := \mathrm{rng}(\rho)$ とすると, Y は推移的集合.
  $\rho : X \to Y$ および Y を $\langle X, R\rangle$ の推移的収縮と呼ぶ.

- R は外延的 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall x, x' \in X)\,(\mathrm{pred}_{X,R}(x) = \mathrm{pred}_{X,R}(x') \to x = x')$.

- R が外延的なら, $\langle X, R\rangle$ の推移的収縮写像 $\rho : X \to Y$ は単射で, $\langle X, R\rangle$ から $\langle Y, \in\restriction Y\rangle$ への同型写像となる.

Section 4

順序数と基数

順序数 1

α が推移的集合で，$\in\restriction\alpha$ が α 上の全順序（整列順序）となるとき，
α を順序数と呼ぶ.

- $\langle X, R\rangle$ を整列順序集合とし，$\rho : X \to \alpha$ をその推移的収縮とすると，α は順序数．α を $\mathrm{otp}(X, R)$ と表し，$\langle X, R\rangle$ の順序型という.
- β が順序数で $\alpha \in \beta$ なら，α も順序数.
- 順序数 α, β に対して，$\alpha < \beta \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \alpha \in \beta$．$<$ は次をみたす.
  - $\forall\alpha\ (\alpha \not< \alpha)$.
  - $\forall\alpha, \beta, \gamma\ ((\alpha < \beta \land \beta < \gamma) \to \alpha < \gamma)$.
  - $\forall\alpha, \beta\ (\alpha < \beta \lor \alpha = \beta \lor \beta < \alpha)$.
- X を順序数からなる集合とすると，$\bigcup X$ は X の上限となる順序数．$\bigcup X$ を $\sup X$ とも表す.
- $\emptyset$ は最小の順序数．$\emptyset$ を 0 とも表す.
- 順序数の和と積が定義される.

順序数 2

- 順序数 α に対して，$\mathrm{S}(\alpha) := \alpha \cup \{\alpha\}$ は α より大きな最小の順序数．
  $\mathrm{S}(\alpha)$ を $\alpha + 1$ とも表す．
- $\mathrm{S}(\alpha)$ の形の順序数を後続型順序数と呼び，
  0 でも後続型順序数でもない順序数を極限順序数と呼ぶ．

定理（ZF）

極限順序数が存在する．

証明：無限公理より，次をみたす集合 X が存在する．

$$\emptyset \in X \wedge (\forall x \in X)\, x \cup \{x\} \in X$$

$\alpha := \{\beta \in X \mid \beta \text{ は順序数} \wedge \beta \subseteq X\}$ とする．α は集合で，極限順序数となる．□

- 最小の極限順序数を ω（または $\mathbb{N}$）と表す．
- ω の要素を自然数または有限順序数と呼ぶ．
- ω およびその上の和と積から，$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ なども形式的に構成できる．

基数 1

次をみたす順序数 α を基数と呼ぶ.

$$(\forall \beta < \alpha)\, \alpha \not\approx \beta$$

- 自然数はすべて基数. ω も基数. しかし, $\omega + 1$ や $\omega + \omega$ は基数ではない.
- 自然数を有限基数, ω 以上の基数を無限基数と呼ぶ.

集合 X 上の整列順序が存在するとき, X は整列可能という.

- X が整列可能 $\leftrightarrow$ X と対等な順序数が存在する.
- X が整列可能であるとき, X と対等な最小の順序数を $|X|$ と表す.
  $|X|$ は基数.
- X が何らかの自然数と対等になるとき, X を有限集合という.
  そうでないとき, X を無限集合という.
- X が整列可能で $|X| \leq \omega$ となるとき, X を可算集合という.
  そうでないとき, X を不可算集合という.

基数 2

定理（ZF）

X, Y を無限の整列可能集合とすると，$X \cup Y$ と $X \times Y$ も整列可能で，

$$|X \cup Y| = |X \times Y| = \max\{|X|, |Y|\}.$$

定理（ZF）

すべての順序数 α に対して，α より大きな基数が存在する．

無限基数を小さいものから順に $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$ または $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$ と表す．
一般に，順序数 α に対して，α 番目の無限基数を ω_α または $\aleph_\alpha$ と表す．

Section 5

諸概念のクラスへの一般化

クラス

$\varphi(x, z_1, \ldots, z_n)$ を $\mathcal{L}_\in$-論理式とする．
集合 $z_1, \ldots, z_n$ に対して，$\varphi(x, z_1, \ldots, z_n)$ をみたす集合 x の集まり

$$\{x \mid \varphi(x, z_1, \ldots, z_n)\}$$

を，集合論でインフォーマルに考える．

このように，何らかの $\mathcal{L}_\in$-論理式をみたす集合の集まりを**クラス**と呼ぶ．
集合ではないクラスを**真のクラス**と呼ぶ．

上のクラスでは，φ をクラスを定義する $\mathcal{L}_\in$-論理式，$z_1, \ldots, z_n$ をクラスを定義するパラメータと呼ぶ．

V と On

- $\mathrm{V} := \{x \mid x = x\}$　（すべての集合のクラス）
- $\mathrm{On} := \{\alpha \mid \alpha$ は順序数$\}$　（すべての順序数のクラス）

定理（ZF）

1. V は真のクラス．（$y = \{x \mid x = x\}$ となる集合 y は存在しない．）
2. On は真のクラス．（$y = \{\alpha \mid \alpha$ は順序数$\}$ となる集合 y は存在しない．）

証明： (1) $y = \{x \mid x = x\}$ となる集合 y が存在するとすると，$y \in y$ となり，$\in$ の整礎性を主張する基礎公理に矛盾する．

(2) $y = \{\alpha \mid \alpha$ は順序数$\}$ となる集合 y が存在するとすると，y も順序数．すると，$y \in y$ となり，基礎公理に矛盾する．　□

集合の関係・述語のクラスへの一般化

集合に対する関係や述語の多くがクラスに対するものに一般化される．
ただし，$\mathcal{L}_\in$-論理式で表せるものに限る．

φ, ψ を $\mathcal{L}_\in$-論理式とし，$X := \{x \mid \varphi(x)\}$，$Y := \{x \mid \psi(x)\}$ とする．

- 集合 x に対して，$x \in X \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \varphi(x)$.
- $X \subseteq Y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x\,(x \in X \to x \in Y) \Leftrightarrow \forall x\,(\varphi(x) \to \psi(x))$.
- $X = Y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x\,(x \in X \leftrightarrow x \in Y) \Leftrightarrow \forall x\,(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$.

$X \in Y$ は，$\mathcal{L}_\in$-論理式で自然に表せないので，普通は考えない．

集合の演算のクラスへの一般化

集合に対する演算もクラスに対するものに一般化される．
ただし，得られる集まりがクラスになるものに限る．

φ, ψ を $\mathcal{L}_{\in}$-論理式とし，$X := \{x \mid \varphi(x)\}$，$Y := \{x \mid \psi(x)\}$ とする．

- $X \cup Y := \{x \mid x \in X \vee x \in Y\} = \{x \mid \varphi(x) \vee \psi(x)\}$.
  $X \cap Y := \{x \mid x \in X \wedge y \in Y\}$.　　$X \setminus Y := \{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\}$.
- $\bigcup X := \{y \mid (\exists x \in X)\, y \in x\} = \{y \mid \exists x\, (x \in X \wedge y \in x)\}$.
- $X \times Y := \{\langle x, y\rangle \mid x \in X \wedge y \in Y\} = \{z \mid \exists x, y\, (x \in X \wedge y \in Y \wedge z = \langle x, y\rangle)\}$.

$\{X, Y\}$ や $\mathcal{P}(X)$ はクラスの集まりで，クラスにはならない．
これらは普通は考えない．

クラス関係とクラス写像

- $R, X_1, \ldots, X_n$ をクラスとする．$R \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$ であるとき，R を $X_1, \ldots, X_n$ 上のクラス n-項関係という．
- 全順序・半順序・同値関係なども自然にクラスに一般化される．
- $\in$ や $\subseteq$ などの集合の関係は，次のようにクラス関係と同一視される．

$$\in = \{\langle x, y\rangle \mid x \in y\}, \qquad \subseteq = \{\langle x, y\rangle \mid x \subseteq y\}$$

- F, X, Y をクラスとする．F が 次をみたす X, Y 上のクラス関係であるとき，F をクラス写像やクラス関数と呼ぶ．

$$(\forall x \in X)(\exists! y \in Y)\, \langle x, y\rangle \in F$$

- F の列としての表記や $F(x)$ なども集合の場合と同様に定める．
- $\bigcup$ や $\mathcal{P}$ などは次のようにクラス関数と同一視する．

$$\bigcup := \{\langle x, y\rangle \mid y = \bigcup x\}, \qquad \mathcal{P} := \{\langle x, y\rangle \mid y = \mathcal{P}(x)\}$$

クラスと定理図式

「すべてのクラス X に対して，$\cdots$.」や「あるクラス X が存在して，$\cdots$.」といった主張は，実質的に「すべての $\mathcal{L}_\in$-論理式に対して，$\cdots$.」や「ある $\mathcal{L}_\in$-論理式が存在して，$\cdots$.」という主張で，$\mathcal{L}_\in$-論理式で書けない．

「すべてのクラス X に対して，$\cdots$.」という主張は図式として述べられ，
「あるクラス X が存在して，$\cdots$.」という主張は具体的にそのクラス X（を定める $\mathcal{L}_\in$-論理式）を書き下して述べられる．

Section 6

クラス上の帰納法と再帰的定義

整礎的なクラス関係 1

X をクラスとし，R を X 上のクラス二項関係とする．

- 空でないすべての集合 $X' \subseteq X$ が R についての極小元を持つとき，X は整礎的であるという．
- R が整礎的な全順序であるとき，R を整列順序という．

注意：「空でないすべてのクラス $X' \subseteq X$ が $\cdots$」が $\mathcal{L}_{\in}$-論理式で書けないので，「空でないすべての集合 $X' \subseteq X$ が $\cdots$」としている．

- すべての $x \in X$ に対して，

$$\mathrm{pred}_{X,R}(x) := \{x' \in X \mid x' \, R \, x\}$$

  が集合となるとき，R は集合状であるという．

- $\in$ は V 上で集合状かつ整礎的．
- $<$ は On 上の集合状な整列順序．

整礎的なクラス関係 2

R が整礎的で集合状な X 上のクラス関係であるとき，空でないすべてのクラス $X' \subseteq X$ は R についての極小元を持つ．

定理図式（ZF）《X, R, X' : クラス》

R を X 上の集合状かつ整礎的なクラス二項関係とし，$\emptyset \neq X' \subseteq X$ とする．このとき，X' は R に関する極小元を持つ．

帰納法原理

定理図式（ZF）《X, R : クラス，$\varphi(x, z_1, \ldots, z_n)$: $\mathcal{L}_\in$-論理式》

$z_1, \ldots, z_n$ を集合とし，R を X 上の集合状かつ整礎的なクラス二項関係とする．また，すべての $x \in X$ に対して，

$$((\forall x' \, R \, x) \, \varphi(x', z_1, \ldots, z_n)) \to \varphi(x, z_1, \ldots, z_n)$$

とする．このとき，すべての $x \in X$ に対して $\varphi(x, z_1, \ldots, z_n)$ が成り立つ．

再帰原理

R をクラス X 上の集合状かつ整礎的なクラス二項関係とする．
X 上のクラス関数 F を定めるには，各 $x \in X$ に対して x と $F \restriction \mathrm{pred}_{X,R}(x)$ から $F(x)$ を定めるクラス関数 G を定めればよい．

定理図式（ZF）《X, R, G : クラス》

R を X 上の集合状かつ整礎的なクラス二項関係とし，G を $X \times \mathrm{V}$ 上のクラス関数とする．このとき，X 上のクラス関数 F で，すべての $x \in X$ に対して

$$F(x) = G(x\,,\, F \restriction \mathrm{pred}_{X,R}(x))$$

となるものが存在する．

注意：実際には，F を定義する $\mathcal{L}_{\in}$-論理式は，X, R, G を定義する $\mathcal{L}_{\in}$-論理式を用いて具体的に書き表される．

集合の階数

クラス関数 $\mathrm{rank} : \mathrm{V} \to \mathrm{On}$ を，次のように $\in$ について再帰的に定義する．

- $\mathrm{rank}(\emptyset) := 0$.
- $\mathrm{rank}(x) := \sup\{\mathrm{rank}(x') + 1 \mid x' \in x\}$.

$\mathrm{rank}(x)$ は，集合 x が $\in$ について何番目の階層にあるかを表す．
$\mathrm{rank}(x)$ を x の**階数**と呼ぶ．

累積階層 1

On 上の列（クラス関数）$\langle \mathrm{V}_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{On} \rangle$ を，次のように再帰的に定める．

- $\mathrm{V}_0 := \emptyset$.
- $\alpha = \beta + 1$ のとき，$\mathrm{V}_\alpha := \mathcal{P}(\mathrm{V}_\beta)$.
- α が極限順序数のとき，$\mathrm{V}_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{V}_\beta = \bigcup \{\mathrm{V}_\beta \mid \beta < \alpha\}$

$\langle \mathrm{V}_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{On} \rangle$ を累積階層と呼ぶ．

次は，α についての帰納法で示せる．

- すべての順序数 α に対して，V_α は推移的集合．
- すべての順序数 α, β に対して，$\beta \leq \alpha$ ならば $\mathrm{V}_\beta \subseteq \mathrm{V}_\alpha$.

累積階層 2

定理（ZF）

$\mathrm{V} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} \mathrm{V}_\alpha$.

証明：V 上の $\in$ についての帰納法で，すべての集合 x に対して，$x \in \mathrm{V}_\alpha$ となる順序数 α が存在することを示す．

$x = \emptyset$ のときは $x \in \mathrm{V}_1$ となり良い．

$x \neq \emptyset$ とする．帰納法の仮定より，各 $y \in \mathrm{V}_\beta$ に対して，$y \in \mathrm{V}_\beta$ となる最小の順序数 β を β_y とする．$\alpha := \sup\{\beta_y \mid y \in x\}$ とすると，すべての $y \in x$ に対して $y \in \mathrm{V}_\alpha$．つまり，$x \subseteq \mathrm{V}_\alpha$ となり，$x \in \mathrm{V}_{\alpha+1}$． $\square$

次の定理も，V 上の $\in$ についての帰納法で証明できる．

定理（ZF）

すべての集合 x に対して，$\mathrm{rank}(x)$ は $x \in \mathrm{V}_{\alpha+1}$ となる最小の順序数 α.