集合論と連続体仮説

池上 大祐
芝浦工業大学

数学基礎論サマースクール 2019

3 コマ目の講演では…

集合論と連続体仮説にかんする講演者の主張と議論について話します。

主張 1

今後の集合論にとって大事なのは、連続体問題についての答えを提示してそのコンセンサスを得ることではなく、連続体問題について問い、考え、議論し、新しい概念・定理・理論を生み出す営みを続けていくことである。

これまでの集合論について振り返ります。

主張 2

　これまでの集合論は、自然数や有限についての理解を深めることを積極的に放棄することで発展を続けてきた。

主張 2

これまでの集合論は、自然数や有限についての理解を深めることを積極的に放棄することで発展を続けてきた。

- 集合論の基本的な研究対象は順序数と基数

主張 2

　これまでの集合論は、自然数や有限についての理解を深めることを積極的に放棄することで発展を続けてきた。

- 集合論の基本的な研究対象は順序数と基数
- 集合論で扱われる集合論のモデルのほとんどは推移的

主張 2

これまでの集合論は、自然数や有限についての理解を深めることを積極的に放棄することで発展を続けてきた。

- 集合論の基本的な研究対象は順序数と基数
- 集合論で扱われる集合論のモデルのほとんどは推移的
- 推移的な集合論のモデルの間では、一階算術の構造 $\mathcal{A}_0 = \langle \omega, +, \times, 0, 1 \rangle$ は変わらない。

主張 2

これまでの集合論は、自然数や有限についての理解を深めることを積極的に放棄することで発展を続けてきた。

- 集合論の基本的な研究対象は順序数と基数
- 集合論で扱われる集合論のモデルのほとんどは推移的
- 推移的な集合論のモデルの間では、一階算術の構造 $\mathcal{A}_0 = \langle \omega, +, \times, 0, 1 \rangle$ は変わらない。
- 多くの数学の命題は、ZFC の下で一階算術の構造で表現できる命題と同値になる。
  例：リーマン予想

主張 2

これまでの集合論は、自然数や有限についての理解を深めることを積極的に放棄することで発展を続けてきた。

- 集合論の基本的な研究対象は順序数と基数
- 集合論で扱われる集合論のモデルのほとんどは推移的
- 推移的な集合論のモデルの間では、一階算術の構造 $\mathcal{A}_0 = \langle \omega, +, \times, 0, 1 \rangle$ は変わらない。
- 多くの数学の命題は、ZFC の下で一階算術の構造で表現できる命題と同値になる。
  例：リーマン予想
- これらの命題の ZFC との無矛盾性、ZFC からの独立性に対して、既存の集合論の手法はすべて無力である。

主張 3

ω の部分集合については、現在少しだけ “わかっている”。

しばらく、主張３にまつわる議論について話します。

射影集合

定義

各位相空間 X に対して、$\langle \mathbf{\Sigma}^1_n(X), \mathbf{\Pi}^1_n(X), \mathbf{\Delta}^1_n(X) \mid n \in \omega, n \geq 1 \rangle$ を以下のように定める：

- $\mathbf{\Sigma}^1_1(X) = \{A \mid A$ は X の解析集合 $\}$
- $\mathbf{\Pi}^1_n(X) = \{X \setminus A \mid A \in \mathbf{\Sigma}^1_n(X)\}$, $\mathbf{\Delta}^1_n(X) = \mathbf{\Sigma}^1_n(X) \cap \mathbf{\Pi}^1_n(X)$
- $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X) = \{\mathrm{p}B \mid B \in \mathbf{\Pi}^1_n(X \times X)\}$

射影集合

定義

各位相空間 X に対して、$\langle \mathbf{\Sigma}^1_n(X), \mathbf{\Pi}^1_n(X), \mathbf{\Delta}^1_n(X) \mid n \in \omega, n \geq 1 \rangle$ を以下のように定める：

- $\mathbf{\Sigma}^1_1(X) = \{A \mid A$ は X の解析集合 $\}$
- $\mathbf{\Pi}^1_n(X) = \{X \setminus A \mid A \in \mathbf{\Sigma}^1_n(X)\}$, $\mathbf{\Delta}^1_n(X) = \mathbf{\Sigma}^1_n(X) \cap \mathbf{\Pi}^1_n(X)$
- $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X) = \{\mathrm{p}B \mid B \in \mathbf{\Pi}^1_n(X \times X)\}$

定理 (ルージン)

X が $\mathbb{R}, {}^\omega\omega$, あるいは ${}^\omega 2$ のとき、以下が成り立つ：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \mathbf{\Sigma}^1_1(X) & & & & \mathbf{\Sigma}^1_2(X) & & \\
 & \subsetneq & & \subsetneq & & \subsetneq & & \subsetneq & \\
\mathbf{\Delta}^1_1(X) & & & & \mathbf{\Delta}^1_2(X) & & & & \cdots \\
 & \subsetneq & & \subsetneq & & \subsetneq & & \subsetneq & \\
 & & \mathbf{\Pi}^1_1(X) & & & & \mathbf{\Pi}^1_2(X) & &
\end{array}$$

射影集合とルージンの問題

定義

X を位相空間、A を X の部分集合とする。
A がある自然数 n に対して $A \in \mathbf{\Sigma}^1_n(X)$ を満たすとき、A を射影集合と呼ぶ。

定理 (ルージン)

$X = \mathbb{R}$ のとき、解析集合（$= \mathbf{\Sigma}^1_1(\mathbb{R})$-集合）はすべてルベーグ可測である。

ルージンの問題

射影集合はすべてルベーグ可測だろうか？

ルージン：この問題は未来永劫、解決することはないだろう。

ルージンの問題のその後

定理 (ゲーデル)

ゲーデルの L において以下が成り立つ：

1. ある $A \in \mathbf{\Delta}^1_2(\mathbb{R})$ でルベーグ可測でないものがある。
2. ある $A \in \mathbf{\Pi}^1_1(\mathbb{R})$ で完全集合の性質を持たないものがある。

とくに、ZFC の下で「射影集合はすべてルベーグ可測である」という言明は証明できない。

Note: A が完全集合の性質を持つとき、A は可算であるか $A \sim \mathbb{R}$ である（つまり、A は連続体仮説の反例にはならない）。

ルージンの問題のその後　つづき

定理 (ウディン、1984 年)

超コンパクト基数が存在するとする。
このとき、射影集合はすべてルベーグ可測であり、完全集合の性質を持つ。

ルージンの問題のその後　つづき

定理 (ウディン、1984 年)

超コンパクト基数が存在するとする。
このとき、射影集合はすべてルベーグ可測であり、完全集合の性質を持つ。

定理 (スティール)

PFA を仮定する。
このとき、射影集合はすべてルベーグ可測であり、完全集合の性質を持つ。

Note: 充分に強い集合論の公理を仮定すると、ルージンの問題は肯定的に解決できる。

ゲール・スチュワートゲームの決定性

定義

- 射影決定性（Projective Determinacy, PD）：射影集合はすべて決定的である。
- 決定性公理（Axiom of Determinacy, AD）：ベール空間の部分集合はすべて決定的である。

定理 (ミッシェルスキ；デイヴィス)

1. PD を仮定すると、射影集合はすべてルベーグ可測であり、完全集合の性質を持つ。
2. AD を仮定すると、実数の集合はすべてルベーグ可測であり、完全集合の性質を持つ。

ゲール・スチュワートゲームの決定性　つづき

定理 (マーティン・スティール)

- ウディン基数が無限個あるとする。このとき、PD が成り立つ。
- ウディン基数が無限個、さらにそれらより大きい可測基数があるとする。このとき、集合論のモデル $L(\mathbb{R})$ において AD が成り立つ。

定理 (スティール)

PFA を仮定する。このとき、PD が成り立つ。さらに、集合論のモデル $L(\mathbb{R})$ において AD が成り立つ。

Note: 充分に強い集合論の公理を仮定すると、PD や $\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$ が成り立つ。

二階算術の構造と射影集合

- 二階算術の構造：$\mathcal{A}_1 = \langle \omega, \mathcal{P}(\omega), \in, 0, 1, +, \times, \rangle$

事実

- 二階算術の構造で定義可能な $\mathcal{P}(\omega)$ の部分集合全体と、カントール空間 ${}^{\omega}2$ の射影集合全体は（自然な同一視の下で）一致する。
- PD や「射影集合がすべてルベーグ可測である」ことは、二階算術の構造がある命題たちを満たすこと、という言明で（ZFC の下で）それぞれ特徴づけできる。

注意

- 二階算術の構造について考えることと射影集合たちについて考えることは同じこと。
- 連続体仮説は、二階算術の構造を使って（ZFC の下で）特徴付けすることはできない。

二階算術の構造と強制法

定理 (ウディン)

ウディン基数が非有界に存在するとする。このとき、どんな二階論理の文 φ に対しても、「$\mathcal{A}_1 \vDash \varphi$」という命題の真偽を強制法で変えることはできない。

定理 (スティール)

PFA を仮定する。このとき、どんな二階論理の文 φ に対しても、「$\mathcal{A}_1 \vDash \varphi$」という命題の真偽を強制法で変えることはできない。

Note: 充分に強い集合論の公理を仮定すると、二階算術の構造で表現できる命題の真偽は強制法で変えることはできない。

まとめと問い

1. 充分に強い集合論の公理を仮定すると、射影集合はすべて、様々な良い性質を持つ。
2. 射影集合たちについて考えることと、二階算術の構造について考えることは同じこと。
3. 充分に強い集合論の公理を仮定すると、二階算術の構造で表現できる命題の真偽は強制法で変えることはできない。

問い

これらの現象の背後には何があるのか？

まとめと問い

1. 充分に強い集合論の公理を仮定すると、射影集合はすべて、様々な良い性質を持つ。
2. 射影集合たちについて考えることと、二階算術の構造について考えることは同じこと。
3. 充分に強い集合論の公理を仮定すると、二階算術の構造で表現できる命題の真偽は強制法で変えることはできない。

問い

これらの現象の背後には何があるのか？

反復可能な構造

反復可能な構造とその使い方

反復可能な構造とは?: 黒板参照

反復可能な構造とその使い方

反復可能な構造とは?: 黒板参照

定理 (ウディン)

$\mathcal{M}$ を反復可能な構造でウディン基数を持つ ZFC のモデルとする。このとき、$\mathcal{M}$ 内での半順序 $\mathbb{P}$ がうまくとれ、以下が成り立つ：

どんな集合 x に対しても、初等埋め込み $j\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ と $(\mathcal{N}, j(\mathbb{P}))$-ジェネリックフィルター g がうまく取れて、$x \in \mathcal{N}[g]$ が成り立つ。

Note:「充分に強い集合論の公理を仮定すると、二階算術の構造で表現できる命題の真偽は強制法で変えることはできない」という現象は、この定理を用いてうまく説明できる。

反復可能な構造と二階算術

定理 (ウディン)

M, N を ZFC のモデルとする。また、以下の言明が M, N のどちらにおいても成り立つとする：

$\mathcal{M}$ はウディン基数を無限個持つ可算で反復可能な ZFC のモデルである

このとき、二階算術の構造で表現できる命題の真偽は M と N の間で変わらない。

注意

- 上の M, N は、推移的である必要はない。
- 上の定理は、これまでの集合論のモデルの構成法に依存しない形で述べられている。

主張３とこれまでのまとめ

ω の部分集合については、現在少しだけ“わかっている”。

以下が、主張３を主張する理由：

- 充分に強い集合論の公理を仮定すると、射影集合たちや二階算術の構造について、様々なことがわかる。
- 「二階算術の構造で表現できる命題の真偽が変わらない」という現象は、巨大基数を持つ反復可能な構造を使ってうまく説明できる。
- この現象がどのようなモデルの組 $\langle M, N \rangle$ に対して起こるか、現在の知見を未来の集合論（のモデルの構成法）に適用できる形で提示する定理がある。

主張４に行く前に、反復可能な構造についてもう少し話します。

ゲーデルのLとジェンセンの微細構造

ジェンセンは、ゲーデルのLについてより詳しく調べるために、
L-階層 $\langle \mathrm{L}_\alpha \mid \alpha \in \mathsf{On} \rangle$ の組みなおしとして、

$$\text{J-階層 } \langle \mathrm{J}_\alpha \mid \alpha \in \mathsf{On} \rangle$$

を導入した。
J-階層 $\langle \mathrm{J}_\alpha \mid \alpha \in \mathsf{On} \rangle$ は様々な良い性質を持つ：

1. 各 J_α は順序対について閉じている。
2. $X \prec_{\Sigma_1} \mathrm{J}_\alpha$ とし、M を $\langle X, \in \rangle$ の推移的収縮とすると、ある順序数 $\beta \leq \alpha$ に対して $M = \mathrm{J}_\beta$.
3. $\mathcal{P}(\kappa) \cap (\mathrm{J}_{\alpha+1} \setminus \mathrm{J}_\alpha) \neq \emptyset$ ならば、$\mathrm{J}_{\alpha+1} \vDash$ “ $|\alpha| \leq \kappa$ ”.

L が持つ J-階層 $\langle \mathrm{J}_\alpha \mid \alpha \in \mathsf{On} \rangle$ やその一般化を、微細構造と呼ぶ。

マウスとその例

ジェンセンは、微細構造を持つ反復可能な集合論の構造をマウスと呼んだ。

例：L

非自明な例

$M_0^{\#}$ あるいは $0^{\#}$ ：詳細は黒板で。

マウスを考えるメリット

1. マウスは、巨大基数が持つ一般的な性質について考察するときに便利である。
2. マウスは、ZF(C)+“ある集合論の公理・原理” の無矛盾性を仮定して、ZFC+“ある巨大基数公理” の無矛盾性を示すときに有益である。
3. マウスと定義可能な ω の部分集合の間には密接な関係がある。

マウスと巨大基数

経験的事実

多くの巨大基数公理 A, B について以下のどれか一つのみが成り立つ：

1. ZFC+A $\vdash$ CON(ZFC+B), （A は B より強い）
2. PA $\vdash$ "CON(ZFC+A) $\leftrightarrow$ CON(ZFC+B)", （A と B は同じ強さ）
3. ZFC+B $\vdash$ CON(ZFC+A). （B は A より強い）

マウスと巨大基数

経験的事実

多くの巨大基数公理 A, B について以下のどれか一つのみが成り立つ：

1. ZFC+A $\vdash$ CON(ZFC+B),（A は B より強い）
2. PA $\vdash$ “CON(ZFC+A) $\leftrightarrow$ CON(ZFC+B)”,（A と B は同じ強さ）
3. ZFC+B $\vdash$ CON(ZFC+A).（B は A より強い）

この現象は、以下の構造 $(\mathcal{M}, \leq)$ を使って大雑把に説明できる：

事実

ZFC のモデルとなるマウス全体を $\mathcal{M}$ としたとき、$\mathcal{M}$ 上に以下を満たす整列擬順序 $\leq$ が入る：

1. $M \leq N$ かつ $N \leq M$ ならば $(M, \in) \equiv (N, \in)$（一階述語論理の構造として初等同値）。
2. $M < N$ ならば、ある $P \in N \cap \mathcal{M}$ に対して $(M, \in) \equiv (P, \in)$.
3. 多くの巨大基数公理 A に対して、A を満たす $M \in \mathcal{M}$ が存在する。

マウスと内部モデル理論

- L やマウスを研究対象とする集合論の分野を内部モデル理論と呼ぶ。

内部モデル理論の目標

どんな巨大基数公理 A に対しても、ZFC+A を満たすマウスを構成する。

重要な A: "超コンパクト基数が存在する"

マウス、射影集合、二階算術の構造

各自然数 n に対して、M_n を、ウディン基数を n 個もつ $M \in \mathcal{M}$ で $\leq$ に関して極小で、ある性質を満たすものとする（$\mathsf{M}_0 = \mathrm{L}$）。

M_n に対する $\mathsf{M}_n^{\#}$ は、L に対する $\mathsf{M}_0^{\#} = 0^{\#}$ のようなもの。

マウス、射影集合、二階算術の構造

各自然数 n に対して、M_n を、ウディン基数を n 個もつ $M \in \mathcal{M}$ で $\leq$ に関して極小で、ある性質を満たすものとする（$\mathsf{M}_0 = \mathrm{L}$）。

M_n に対する $\mathsf{M}_n^{\#}$ は、L に対する $\mathsf{M}_0^{\#} = 0^{\#}$ のようなもの。

定理 (ニーマン、ウディン)

以下は同値：

1. 各自然数 n に対して、$\mathsf{M}_n^{\#}$ が存在して反復可能である。
2. PD が、どんな強制拡大においても成り立つ。

定理 (ウディン)

各自然数 n に対して、$\mathsf{M}_n^{\#}$ が存在して反復可能であるとし、
x, y を ω の部分集合とする。このとき、以下は同値：

1. ある自然数に対して $x \in \mathsf{M}_n(y)$.
2. x は二階算術の構造で y のみをパラメータに用いて定義可能。

マウスと ω の部分集合

定義

1. x が y とある順序数で定義可能なとき、$x \in \mathrm{OD}(y)$ と書く。
2. x がある順序数で定義可能な時、$x \in \mathrm{OD}$ と書く。
3. $\mathrm{HOD} = \{x \mid \big(\forall z \in \mathrm{tr.cl.}(\{\ x\ \})\big)\ z \in \mathrm{OD}\}$.

HOD は “とても大きな” ZFC のモデル。

マウスと ω の部分集合

定義

1. x が y とある順序数で定義可能なとき、$x \in \mathrm{OD}(y)$ と書く。
2. x がある順序数で定義可能な時、$x \in \mathrm{OD}$ と書く。
3. $\mathrm{HOD} = \{x \mid (\forall z \in \mathrm{tr.cl.}(\{\ x\ \}))\ z \in \mathrm{OD}\}$.

HOD は "とても大きな" ZFC のモデル。

「(定義可能な実数) = (あるマウスに属する実数)」という思想がある：

マウス集合予想

ZF+ AD^{+}+ $V = L(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ の下で、超強基数を持つ内部モデルが存在しないとする。
このとき、どんな $x, y \subseteq \omega$ に対しても

$$x \in \mathrm{OD}(y) \iff x \text{ はある } y\text{-マウスに属する}$$

が成り立つ。

マウスについてのまとめ

1. マウスとは、ゲーデルの L が持つ構造を抽出し一般化した、反復可能な集合論の構造である。
2. マウスは、巨大基数が持つ一般的な性質について考察するときに便利である。
3. マウスと定義可能な ω の部分集合の間には密接な関係がある。

最後の主張の話に移ります。

主張 4

これまでの集合論についてのなるべく多くの現象をマウスを使って説明しようとすると、連続体濃度は ω_1 になるのが適切である。

予備知識：普遍ベール集合

定義 (フェング、マギダー、ウディン)

1. X を位相空間とし、B を X の部分集合とする。
   - B がある X の稠密な開集合と交わらないとき、B を X の疎集合と呼ぶ。
   - B が可算個の X の疎集合の合併となるとき、B を X の痩せ集合と呼ぶ。
   - B とある X の開集合 U の対称差 $B \triangle U$（$= (B \setminus U) \cup (U \setminus B)$）が X の痩せ集合となるとき、B は X においてベールの性質を持つという。

予備知識：普遍ベール集合

定義 (フェング、マギダー、ウディン)

1. X を位相空間とし、B を X の部分集合とする。
   - B がある X の稠密な開集合と交わらないとき、B を X の疎集合と呼ぶ。
   - B が可算個の X の疎集合の合併となるとき、B を X の痩せ集合と呼ぶ。
   - B とある X の開集合 U の対称差 $B \triangle U$（$= (B \setminus U) \cup (U \setminus B)$）が X の痩せ集合となるとき、B は X においてベールの性質を持つという。
2. カントール空間 ${}^{\omega}2$ の部分集合 A が以下を満たすとき、A は普遍ベール集合と呼ばれる：
   どんなコンパクトハウスドルフ空間 X と連続写像 $f\colon X \to {}^{\omega}2$ を取っても、集合 $f^{-1}(A)$ は空間 X においてベールの性質を持つ。

予備知識：普遍ベール集合と巨大基数

定理 (ウディン)

ウディン基数が非有界にあるとする。このとき、

1. どんな普遍ベール集合 A に対しても、集合論のモデル $\mathrm{L}(A, \mathbb{R})$ で AD^+ が成り立つ。
2. どんな普遍ベール集合 A とどんな $B \in \mathrm{L}(A, \mathbb{R}) \cap \mathcal{P}({}^{\omega}2)$ を取っても、B は普遍ベール集合である。

予備知識：普遍ベール集合とマウス

記号の導入

- uB で、普遍ベール集合全体を表す。
- $\Sigma^2_1(\mathrm{uB})$ で、三階の構造 $(\omega, \mathcal{P}(\omega), \mathrm{uB}, <, \in)$ において Σ^2_1 論理式で定義できる実数の集合全体を表す。
- $\mathcal{R}$ で、集合 $\{x \in {}^{\omega}2 \mid$ あるマウス M に対して $x \in M\}$ を表す。

予備知識：普遍ベール集合とマウス

記号の導入

- uB で、普遍ベール集合全体を表す。
- $\Sigma^2_1(\mathrm{uB})$ で、三階の構造 $(\omega, \mathcal{P}(\omega), \mathrm{uB}, <, \in)$ において Σ^2_1 論理式で定義できる実数の集合全体を表す。
- $\mathcal{R}$ で、集合 $\{x \in {}^{\omega}2 \mid$ あるマウス M に対して $x \in M\}$ を表す。

現存するマウスの振る舞いは普遍ベール集合によって統制できる：

経験的事実

ウディン基数が非有界に存在するとする。

1. 現存するマウスの反復可能性を保証する数学的対象（反復戦略）は、普遍ベール集合を使って "計算" できる。
2.
   - $\mathcal{R}$ は $\Sigma^2_1(\mathrm{uB})$ な集合で、濃度は高々 ω_1.
   - $\mathcal{R}$ 上の整列順序で $\Sigma^2_1(\mathrm{uB})$ なものが取れる。

“良い” 集合論のモデルとは？

1. その構造が綿密に分析できるモデル
例：ゲーデルの L, マウス

2. 集合論の多くの現象を説明することができるモデル
例：強い巨大基数公理を満たすモデル

定理 (スコット)

可測基数の存在を仮定すると、$\mathrm{V} \neq \mathrm{L}$ である。

“良い” 集合論のモデルとは？　つづき

提案

“良い” 集合論のモデルとして、強い巨大基数公理を満たすマウスを考えてみてはどうか？

“良い” 集合論のモデルとは？　つづき

提案

“良い” 集合論のモデルとして、強い巨大基数公理を満たすマウスを考えてみてはどうか？

問題点

「M は反復可能である」という言明は M と V の間で絶対的とは限らない。

定理 (スティール)

M を、ZFC を満たしウディン基数を持つマウスとする。このとき、$M \models$ “僕は反復可能じゃない！”. よって、$M \models$ “僕はマウスじゃない！”.

Note: 「M は反復可能である」という事実が M の中では使えない。
$\Leftarrow$ 不便

“良い” 集合論のモデルとは？　つづき 2

問い

マウスのように綿密な構造解析ができる集合論のモデルで、自分自身が反復可能であることを “知っている” 数学的対象はあるか？

一つの答え

hod マウス

“良い” 集合論のモデルとは？　つづき2

問い

マウスのように綿密な構造解析ができる集合論のモデルで、自分自身が反復可能であることを “知っている” 数学的対象はあるか？

一つの答え

hod マウス

巨大基数の持つ性質を保証する超フィルターたちの情報だけでなく、（構成の途中で反復可能となっている構造の）反復戦略についての情報も加えて得られる微細構造をもつ数学的対象を **hod マウス**と呼ぶ。

定理 (ウディン・スティール)

ZFC と $AD^{L(\mathbb{R})}$ を仮定する。このとき、$HOD^{L(\mathbb{R})}$ は hod マウスとなる。

Note: hod マウスは、GCH やダイヤモンド原理など多くの組み合わせ論的原理を満たす。

hod マウスと HOD

未解決問題

- ZF の下で AD^+ と $\mathrm{V} = \mathrm{L}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ を仮定する。このとき、HOD は必ず hod マウスとなるか？
- 超コンパクト基数を持つ hod マウスは存在しうるか？

究極の L 公理

定義 (ウディン)

究極の **L** 公理は、以下の二つからなる：

1. ウディン基数が非有界に存在する。
2. どんな Σ_2 な命題 ϕ に対しても、もし ϕ が成り立つなら、ある普遍ベール集合 A がうまくとれて、$M = \mathrm{HOD}^{\mathrm{L}(A,\mathbb{R})}$ としたとき、ϕ は V_Θ^M でも成り立つ。ここで、

$$\Theta = \sup\{\alpha \mid \mathbb{R} \text{ から } \alpha \text{ への全射が } \mathrm{L}(A,\mathbb{R}) \text{ 内にある }\}$$

である。

Note: ウディン基数が非有界にあるとき、どんな普遍ベール集合 A に対しても、集合論のモデル $\mathrm{L}(A,\mathbb{R})$ は AD^+ のモデルになるのだった。

究極のLL公理　つづき

定理 (ウディン)

ZF の下で AD$^+$ と $\mathrm{V} = \mathrm{L}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ を仮定する。このとき、HOD において連続体仮説が成り立つ。

Note: ウディン基数が非有界にあるとき、どんな普遍ベール集合 A に対しても、集合論のモデル $\mathrm{L}(A, \mathbb{R})$ は AD$^+$ のモデルになるのだった。

系

究極の L 公理を仮定する。このとき、連続体仮説が成り立つ。

究極の L 公理　ぱっと思い浮かぶ疑問

1. どのあたりが「究極」なのだろうか？
2. この公理と L との関係はどういうものだろうか？
3. この公理は ZFC と無矛盾なのだろうか？また、どのくらい強い巨大基数公理と共存しうるのか？
4. 今までの話の流れからすると、なぜ「集合全体が hod マウスである」という命題そのものを公理としないのか？

一つ目の疑問への回答

どのあたりが「究極」なのだろうか？

答え

究極の L 公理が「究極」な理由は、どんな巨大基数公理とも共存しうるポテンシャルを持っている公理だから。

より詳しく説明するには、究極の L 予想について説明する必要がある。

究極の L 予想

定義 (ウディン)

1. N を ZFC の内部モデル、δ を超コンパクト基数とする。N が以下の条件を満たすとき、N は δ が超コンパクト基数であることの弱エクステンダーモデルと呼ぶ：
   どんな順序数 $\lambda > \delta$ に対しても、δ の λ-超コンパクト性を保証する $\mathcal{P}_\delta\lambda$ 上の善良かつ正規な超フィルター U がうまくとれて、以下が成り立つ：
   - $N \cap \mathcal{P}_\delta\lambda \in U$ かつ
   - $U \cap N \in N$.
2. 究極の **L** 予想とは、以下の言明である：
   δ を拡張可能基数とする。このとき、δ が超コンパクト基数であることの弱エクステンダーモデルで、究極の L 公理を満たすものが存在する。

究極の L 予想の気持ち

「δ が超コンパクト基数であることの弱エクステンダーモデル N」は、V に非常に “近く”、V で成り立つ巨大基数公理のほとんどが、N でも成り立つ：

定理 (ウディン)

N を、δ が超コンパクト基数であることの弱エクステンダーモデルとする。このとき、以下が成り立つ：

1. どんな特異基数 $\gamma > \delta$ も、N においても特異基数であり、$\gamma^+ = (\gamma^+)^N$ となる。
2. α を順序数、$j\colon N \cap V_{\alpha+1} \to N \cap V_{j(\alpha)+1}$ を初等埋め込みでその臨界点 $\mathrm{crit}(j)$ が δ 以上のものとすると、j は N に属する。

究極の L 予想の気持ち

「δ が超コンパクト基数であることの弱エクステンダーモデル N」は、V に非常に "近く"、V で成り立つ巨大基数公理のほとんどが、N でも成り立つ：

定理 (ウディン)

N を、δ が超コンパクト基数であることの弱エクステンダーモデルとする。このとき、以下が成り立つ：

1. どんな特異基数 $\gamma > \delta$ も、N においても特異基数であり、$\gamma^+ = (\gamma^+)^N$ となる。
2. α を順序数、$j : N \cap V_{\alpha+1} \to N \cap V_{j(\alpha)+1}$ を初等埋め込みでその臨界点 $\mathrm{crit}(j)$ が δ 以上のものとすると、j は N に属する。

よって、究極の L 予想は、究極の L 公理を満たし、V に非常に "近い" 集合論のモデルがあることを要請している。

二つ目の疑問への回答

この公理と L との関係はどういうものだろうか？

答え

究極の L 公理は、Σ_2 な命題については、V で成り立つことは、$\mathrm{HOD}^{L(A,\mathbb{R})}$ というモデルの rank initial segment で成り立つ、と言っている。

ここでの $\mathrm{HOD}^{L(A,\mathbb{R})}$ というモデルは、hod マウスとなることが期待されている構造。

hod マウスは、L を一般化した微細構造を持つ集合論の構造で、巨大基数の存在を保証する超フィルターたちの情報と反復可能性を保証する反復戦略の情報を併せ持つ数学的対象。

三つ目の疑問への回答

この公理は ZFC と無矛盾なのだろうか？また、どのくらい強い巨大基数公理と共存しうるのか？

答え

（ZFC+巨大基数公理の無矛盾性を仮定すると）究極の L 公理は ZFC と無矛盾。

可測基数、多くのウディン基数と共存しうることはわかっているが、それらより強い超強基数、超コンパクト基数、拡張可能基数と共存しうるかはわかっていない。

とくに、究極の L 予想が成り立つかどうかはわかっていない。

四つ目の疑問への回答

今までの話の流れからすると、なぜ「集合全体が hod マウスである」という命題そのものを公理としないのか？

答え

現時点で、超コンパクト基数を初めとする強い巨大基数を持つ hod マウスが存在するかどうかわからないから。
もしかしたら、超コンパクト基数を持つ hod マウスは存在しえないのかもしれない。
現時点ではどのような構造か定義すらわからないものは公理にしようがない。
しかし、我々は、普遍ベール集合を初めとする記述集合論の言葉を用いて、そのような構造がどのような性質を持ちうるかについて議論することができる。
この点が、究極の L 公理が普遍ベール集合の言葉を用いて記述されている理由。

現在の内部モデル理論の限界と $\Sigma^2_1(\mathrm{uB})$

現在のマウス（あるいは hod マウス）で到達できる ω の部分集合の複雑さの限界は $\Sigma^2_1(\mathrm{uB})$.

この複雑さを持つ数学的対象では超コンパクト基数の性質をとらえきれない可能性もある。

現在の内部モデル理論の限界と $\Sigma^2_1(\mathrm{uB})$

現在のマウス（あるいは hod マウス）で到達できる ω の部分集合の複雑さの限界は $\Sigma^2_1(\mathrm{uB})$.

この複雑さを持つ数学的対象では超コンパクト基数の性質をとらえきれない可能性もある。

未解決問題

ZFC において、ウディン基数が非有界にあり、超コンパクト基数があるとする。このときに、どんな $\Sigma^2_1(\mathrm{uB})$ な実数の集合もルベーグ可測になることが証明可能か？

この未解決問題が肯定的に解決されたとすると、究極の L 公理と超コンパクト基数が共存しえないことがわかる。特に、究極の L 予想は成り立たない。

最後に

究極の L 予想が成り立つかどうかはどちらでもよい。重要なのは、その答えに至る過程と議論。

最後に

究極の L 予想が成り立つかどうかはどちらでもよい。重要なのは、その答えに至る過程と議論。

究極の L 予想が否定された場合は、その過程で普遍ベール集合よりも複雑な数学的対象に出会う可能性がある。それはそれで面白いし、その場合、記述集合論と内部モデル理論はさらなる発展を遂げると思う。

最後に

究極の L 予想が成り立つかどうかはどちらでもよい。重要なのは、その答えに至る過程と議論。

究極の L 予想が否定された場合は、その過程で普遍ベール集合よりも複雑な数学的対象に出会う可能性がある。それはそれで面白いし、その場合、記述集合論と内部モデル理論はさらなる発展を遂げると思う。

いずれにしろ、L やマウスのような数学的対象と記述集合論によって巨大基数公理を理解しようとする営みは、超コンパクト基数について我々が "わかった" と思うときまでは続くだろう。そのときには、連続体仮説についての新しい議論も生まれているかもしれない。

おしまい。

ありがとうございました！