選択公理と数学

藤田 博司

愛媛大学理学部

2019 年 9 月 6 日
数学基礎論サマースクール 2019 @静岡大学

注意!!

この講義でも，とくに断わらない限り，選択公理を仮定しない

近傍と閉包

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ **の点** $p \in X$ **の近傍全体を** $\mathcal{N}(p)$ **と書く**

$$\mathcal{N}(p) = \{\, A \subset X \mid \exists O \in \mathcal{O}(\, p \in O \subset A\,)\,\}$$

部分集合 $A \subset X$ **の閉包を** $\mathrm{Cl}\,.A$ **と書く**

$$\mathrm{Cl}\,.A = \{\, p \in X \mid \forall U \in \mathcal{N}(p)(\, U \cap A \neq \emptyset\,)\,\}$$

くっついた点

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の部分集合の族 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ に対して，集合

$$\bigcap \{ \mathrm{Cl}.A \mid A \in \mathcal{A} \}$$

に属する点のことを，$\mathcal{A}$ に **くっついた点** という．

(例) 数直線 $\mathbb{R}$ の通常の位相において，数 0 は開区間の族 $\{ (0, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0 \}$ にくっついた点である．

フィルターの収束 (1)

位相空間 $(X,\mathcal{O})$ 上のフィルター $\mathcal{F}$ は $\mathcal{N}(p)\subset\mathcal{F}$ のとき点 p に**収束する**といって $\mathcal{F}\to p$ と書く．

補題

フィルター $\mathcal{F}$ が点 p に収束するとき p は $\mathcal{F}$ にくっついている．

$A\in\mathcal{A}$ と $U\in\mathcal{N}(p)$ を任意にとると，$\mathcal{N}(p)\subset\mathcal{F}$ より $U\in\mathcal{F}$ でもあり $U\cap A\in\mathcal{F}$ であるから $U\cap A\neq\emptyset$ である．すべての $U\in\mathcal{N}(p)$ についてこれが成立するので $p\in \mathrm{Cl}\,.A$ であり，すべての $A\in\mathcal{F}$ についてこれが成立するので $p\in\bigcap\{\,\mathrm{Cl}\,.A\mid A\in\mathcal{F}\,\}$ である．(証明終)

逆は一般には成立しない．(例) 数直線 $\mathbb{R}$ の通常の位相において $\mathcal{F}=\{\,A\subset\mathbb{R}\mid[-1,1]\subset A\,\}$ とすると 0 は $\mathcal{F}$ にくっついているが，開区間 $(-1,1)\notin\mathcal{F}$ なので $\mathcal{F}\to 0$ ではない．

フィルターの収束 (2)

超フィルターに限定すれば逆が成立する．

補題

位相空間 X の点 p が超フィルター $\mathcal{U}$ にくっついているとき $\mathcal{U} \to p$ である．

$p \in \bigcap\{\mathrm{Cl}.A \mid A \in \mathcal{U}\}$ と仮定し任意の近傍 $U \in \mathcal{N}(p)$ を考える．このとき任意の $A \in \mathcal{U}$ について $p \in \mathrm{Cl}.A$ より $U \cap A \neq \emptyset$ であるから $\{U\} \cup \mathcal{U}$ は fip をもつ．よって $\mathcal{U}$ の極大性により $U \in \mathcal{U}$ で $\mathcal{N}(p) \subset \mathcal{U}$ となる．(証明終)

コンパクト位相空間

定義

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が **コンパクト** であるとは，fip をもつ任意の部分集合族 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ について $\bigcap \{ \operatorname{Cl} A \mid A \in \mathcal{A} \} \neq \emptyset$ となることである．

補題 (AC を仮定)

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ がコンパクトであることと，X 上の任意の超フィルターが X のある点に収束することとは同値．

$(\Rightarrow)$ 超フィルター $\mathcal{U}$ は fip をもつのでコンパクト性の定義から $\mathcal{U}$ にくっついた点 p が存在．このとき $\mathcal{U} \to p$ である．

$(\Leftarrow)$ fip をもつ集合族 $\mathcal{A}$ を含む超フィルター $\mathcal{U}$ を考える (AC)．仮定より $\mathcal{U} \to p$ をみたす点 p が存在．p は $\mathcal{U}$ にくっついているからそれより小さい $\mathcal{A}$ にもくっついている．(証明終)

直積位相 (1)

位相空間の族 $\{(X_i, \mathcal{O}_i) \mid i \in I\}$ が与えられたとする．以後しばらく，直積集合 $\prod_{i \in I} X_i$ を X と書く．$i \in I$ ごとに

$$\pi_i \colon X \to X_i;\ p \mapsto p(i)$$

を X_i への **射影** と呼ぶ．

直積位相 (2)

点 $p \in X$ に対し，有限個の添字 $i_0, \ldots, i_n \in I$ をとり各 X_{i_k} における $p(i_k)$ の近傍 U_{i_k} をとって

$$U \supset (\pi_{i_0}^{-1}``U_{i_0}) \cap \cdots \cap (\pi_{i_n}^{-1}``U_{i_n})$$
$$\bigl(= \{\, x \in X \mid x(i_0) \in U_{i_0}, \ldots, x(i_n) \in U_{i_n} \,\}\bigr)$$

とできるような U を点 p の近傍として直積集合 X に位相を与える．この位相を **直積位相** という．(黒板で解説)

直積位相はすべての射影 π_i を連続にするような X の位相のうちで最も弱い (開集合が少ない) ものである．

ティコノフの定理 (1)

ティコノフの定理 (AC を仮定)

各 X_i がコンパクトならば直積空間 X もコンパクトである

直積空間 X 上の超フィルター $\mathcal{U}$ が与えられたとする．$i \in I$ ごとに

$$\pi_i[\mathcal{U}] = \{ A \subset X_i \mid \pi_i^{-1} “A \in \mathcal{U} \}$$

と定める．このとき $\pi_i[\mathcal{U}]$ は X_i 上の超フィルターである．各 X_i はコンパクトなので $\pi_i[\mathcal{U}]$ は X_i のある点に収束する．そこで $\pi_i[\mathcal{U}] \to p(i)$ となるように各 $i \in I$ で $p(i)$ をとって $p \in X$ を定める (AC)．$\mathcal{U} \to p$ を示すために A を p の任意の近傍とする．有限個の $i_0, \ldots, i_n \in I$ と $p(i_k)$ の近傍 U_{i_k} を $A \supset (\pi_{i_0}^{-1} “U_{i_0}) \cap \cdots \cap (\pi_{i_n}^{-1} “U_{i_n})$ となるようにとる．

ティコノフの定理 (2)

いま $\pi_{i_k}[\mathcal{U}] \to p(i_k)$ **なので** $U_{i_k} \in \pi_{i_k}[\mathcal{U}]$ **すなわち** $\pi_{i_k}^{-1}``U_{i_k} \in \mathcal{U}$ **である．したがって**

$$(\pi_{i_0}^{-1}``U_{i_0}) \cap \cdots \cap (\pi_{i_n}^{-1}``U_{i_n}) \in \mathcal{U}$$

よって $A \in \mathcal{U}$ **である．**A **は** p **の任意の近傍だったから** $\mathcal{U} \to p$ **となる．こうして** X **の超フィルターが収束することがわかったので** X **はコンパクトである** (AC)**．(証明終)**

ティコノフの定理 (3)

ティコノフの定理の証明における 2 度の選択公理の使用は避けられない

ケリーの指摘

ティコノフの定理から選択公理が導かれる．

各 $i \in I$ ごとに集合 A_i が対応していて $A_i \neq \emptyset$ だったとして，$\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ を示す．何か $e \notin \bigcup_{i \in I} A_i$ となる e を固定し，$X_i = A_i \cup \{e\}$ とする．$\mathcal{O}_i = \{X_i, \{e\}, \emptyset\}$ とすると $(X_i, \mathcal{O}_i)$ はコンパクト位相空間である (開集合が有限個しかないから明らか)．ティコノフの定理により直積空間 $X = \prod_{i \in I} X_i$ もコンパクトである．各 $i \in I$ について A_i が X_i の閉集合であり $\pi_i : X \to X_i$ は連続なので $\pi_i^{-1} A_i$ は X の閉集合である．

ティコノフの定理 (4)

また集合族 $\mathcal{A} = \{\, \pi_i^{-1}\text{``}A_i \mid i \in I \,\}$ は fip をもつ (∵任意有限個の $i_0, \ldots, i_n \in I$ に対して $x_{i_0} \in A_{i_0}, \ldots, x_{i_n} \in A_{i_n}$ をとって $p(i_k) = x_{i_k}$ とし $i \notin \{i_0, \ldots, i_n\}$ のとき $p(i) = e$ とすれば

$$p \in \pi_{i_0}^{-1}\text{``}A_{i_0} \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}\text{``}A_{i_n}$$

となる)．こうして集合族 $\{\, \pi_i^{-1}\text{``}A_i \mid i \in I \,\}$ は X の閉集合からなる fip をもつ集合族となるから X のコンパクト性から

$$\prod_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}\text{``}A_i \neq \emptyset$$

となる．(証明終)

ベクトル空間の基底 (1)

体 K 上のベクトル空間 V の部分集合 $S \subset V$ が 一次独立 であるとは，

$$\forall n \geq 1 \, \forall s_0, \ldots, s_n \in S \, \forall c_0, \ldots, c_n \in K \setminus \{0\} \left(c_0 s_0 + \cdots + c_n s_n \neq 0 \right)$$

となっていること (S の要素の一次結合でゼロベクトルを表わす方法が自明なものしかないこと) をいう．

ベクトル空間の基底 (2)

体 K 上のベクトル空間 V の部分集合 S が V の (K 上の) **基底**であるとは，V のすべての要素が S の有限個の要素の一次結合としてそれぞれ一意的にあらわされることをいう．

基底であることと，極大な一次独立集合であることとは同値である．ツォルンの補題を用いれば極大な一次独立部分集合をとれるから，

定理 (AC)

任意の体 K 上の任意のベクトル空間が基底をもつ

この定理の逆を示すのがここからの目標．

複数選択公理

選択公理 (AC, 再掲)

集合族 $\mathcal{A}$ (ただし $\emptyset \notin \mathcal{A}$) に対して，各 $A \in \mathcal{A}$ にその要素 $\sigma(A)$ を対応させる写像 (選択関数) $\sigma \colon \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$ が存在する

複数選択公理 (Axiom of Multiple Choice, MC)

集合族 $\mathcal{A}$ (ただし $\emptyset \notin \mathcal{A}$) に対して，各 $A \in \mathcal{A}$ にその空でない有限部分集合 $E(A)$ を対応させる写像 $E \colon \mathcal{A} \to \mathcal{P}(\bigcup \mathcal{A})$ が存在する．

あきらかに AC$\Rightarrow$MC である．
(ZF のもとで)MC と AC が同値であることをあとで示す．

基底の存在から MC へ (1)

定理

任意の体の上の任意のベクトル空間が基底をもつならば，複数選択公理 MC が成立する．

集合族 $\mathcal{A}$ が与えられたとする．ただし $\emptyset \notin \mathcal{A}$ とする．

一般性を損わず，$\mathcal{A}$ のメンバーどうしは互いに共通の要素をもたないと仮定する

$$A, A' \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap A' = \emptyset$$

基底の存在から MC へ (2)

$X = \bigcup \mathcal{A}$ とし，X の要素を「文字」とする有理数係数分数式の体 $\mathbb{Q}(X)$ を考える．

$A \in \mathcal{A}$ とする．$\mathbb{Q}(X)$ の単項式 $cx_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}$ (ただし $c \in \mathbb{Q}$, $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{N}_{>0}$) の A-次数 とは A に属する文字の指数の総和

$$\sum_{x_i \in A} r_i$$

のことだとする．(集合 A に属する文字に関する次数)

$d \in \mathbb{N}$ に対し，d 次の A-斉次多項式 とは，A-次数が d の単項式ばかりの和になっているような多項式のこと．

分母が d_1 次の A-斉次多項式，分子が d_2 次の A-斉次多項式であるような分数式のことを $d_2 - d_1$ 次の A-斉次分数式 という．

基底の存在から MC へ (3)

K を，すべての $A \in \mathcal{A}$ について 0 次の A-斉次分数式であるような $\mathbb{Q}(X)$ のメンバー全体のなる $\mathbb{Q}(X)$ の部分体とする．

このとき，仮定により，K 上のベクトル空間とみた $\mathbb{Q}(X)$ の基底 S が存在する．

$x \in A \in \mathcal{A}$ のとき x は基底 S の要素の K 係数の一次結合として一意的にあらわされる

$$x = \sum_{s \in B(x)} c_{s,x} s$$

ここで $B(x)$ は S の有限部分集合で，各 $s \in B(x)$ について $c_{s,x}$ は K の 0 でない要素．

基底の存在から MC へ (4)

ここで $x, y \in A$ **とすると** $y/x \in K$ **である．** y **の二つの表示を考える**

$$y = \sum_{s \in B(y)} c_{s,y} s$$

$$y = \frac{y}{x} \cdot x = \sum_{s \in B(x)} \left(\frac{y}{x} c_{s,x} \right) s$$

表示の一意性から， $B(x) = B(y)$ **であり，各** $s \in B(x)$ **について** $(y/x) c_{s,x} = c_{s,y}$ **したがって** $c_{s,x}/x = c_{s,y}/y$ **である．**

S **の部分集合** $B(x)$ **は** x **によらず** A **で決まる．以下** $B(A)$ **と書く．各** $s \in B(A)$ **に対する** $c_{s,x}/x$ **は** x **によらず** A **と** s **で決まる．以下** $f_{s,A}$ **と書く．**

基底の存在から MC へ (5)

$s \in B(A)$ のとき，$f_{s,A}$ は -1 次の A-斉次分数式なので，既約分数表示すると分母に A に属する文字が 1 個以上出現する．

そこで $E(A)$ をある $s \in B(A)$ に対する $f_{s,A}$ の既約分母にあらわれる A に属する文字全体の集合とすれば，$E(A)$ は A の空でない有限部分集合である．(証明終)

MC から AC へ (1)

補題 1 (MC を仮定)

集合 X が全順序づけ可能ならば，$\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ に対する選択関数 $\sigma \colon \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$ が存在する．

$\leqslant$ が X 上の全順序だとして各 $A \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ に対し空でない有限集合 $E(A)$ の $\leqslant$-最小要素を $\sigma(A)$ とすればよい．(証明終)

補題 2

集合 W が整列順序づけ可能ならば，冪集合 $\mathcal{P}(W)$ は全順序づけ可能である．

$\leqslant_W$ を W 上の整列順序とし，$A, B \subset W$, $A \neq B$ のとき $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ の $\leqslant_W$-最小要素が A に入れば $B <^* A$ とし B に入れば $A <^* B$ とする．このとき $<^*$ は $\mathcal{P}(W)$ 上の全順序となる．(証明終)

MC から AC へ (2)

補題 3 (MC を仮定)

集合 W が整列順序づけ可能ならば，冪集合 $\mathcal{P}(W)$ は整列順序づけ可能である．

補題 2 **により** $\mathcal{P}(W)$ **が全順序づけ可能，補題** 1 **により** $\mathcal{P}(\mathcal{P}(W)) \setminus \{\emptyset\}$ **に対する選択関数が存在** (MC)**，したがって整列定理** Local Version **により** $\mathcal{P}(W)$ **が整列可能である．(証明終)**

この補題 3 **の主張は** ZF **においては** AC **と同値である．**

MC から AC へ (3)

補題 4 (cf. キューネン『集合論』第 III 章演習問題 (9))

すべての順序数 β の冪集合 $\mathcal{P}(\beta)$ が整列順序づけ可能ならば，累積階層の各水準 V_α $(\alpha \in \mathrm{On})$ は整列可能である．

順序数 α が任意に与えられたとする．$\beta = \aleph(V_\alpha)$ とする (単射 $\beta \to V_\alpha$ が存在しない最小の順序数)．仮定により $\mathcal{P}(\beta)$ 上の整列順序づけ $\lhd$ が存在する．

順序数 $\gamma \leq \alpha$ について再帰的に，V_γ の整列順序づけ $<^*_\gamma$ を定める．すべての $\xi < \gamma$ に対して $<^*_\xi$ がすでに定義されているとする．

まず $\gamma = 0$ のときは何もすることがない．

MC から AC へ (4)

(γ が後続型順序数のとき)

$\gamma = \xi + 1$ だとする．

$\mathsf{V}_\xi \subset \mathsf{V}_\alpha$ なので $\mathrm{otp}(\mathsf{V}_\xi, <^*_\xi) < \beta$ である．一意的な同型写像

$$\rho\colon (\mathsf{V}_\xi, <^*_\xi) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{otp}(\mathsf{V}_\xi, <^*_\xi) \subset \beta$$

によって冪集合 $\mathsf{V}_{\xi+1} = \mathcal{P}(\mathsf{V}_\xi)$ は $\mathcal{P}(\beta)$ に自然に埋めこまれるので，整列集合 $(\mathcal{P}(\beta), \lhd)$ の順序を $\mathsf{V}_{\xi+1}$ に "引き戻し" て，整列順序づけ $<^*_{\xi+1}$ を定める．

MC から AC へ (5)

(γ が極限順序数のとき)

各 $\xi < \gamma$ ごとに，$\mathsf{V}_{\xi+1} \setminus \mathsf{V}_\xi$ の要素を (すでに定まっている) $<^*_{\xi+1}$ によって整列させた並びを ξ の小さい順につないだ順序づけを $<^*_\gamma$ とすればよい．

もうちょっとちゃんと書けば:

$$x <^*_\gamma y \Leftrightarrow \exists\xi < \gamma\big(x \in \mathsf{V}_\xi \text{ かつ } y \notin \mathsf{V}_\xi\big)$$
$$\text{または } \exists\xi < \gamma\big(x, y \in \mathsf{V}_{\xi+1} \setminus \mathsf{V}_\xi \text{ かつ } x <^*_{\xi+1} y\big)$$

と定める．(証明終)