

選択公理と整列集合

藤田 博司

愛媛大学理学部

2019 年 9 月 5 日

数学基礎論サマースクール 2019 @静岡大学

選択公理 (1)

選択公理 (Axiom of Choice, AC)

集合族 $\mathcal{A}$ (ただし $\emptyset \notin \mathcal{A}$) に対して, 関数 $\sigma: \mathcal{A} \rightarrow \bigcup \mathcal{A}$ を

$$\forall A \in \mathcal{A} (\sigma(A) \in A)$$

となるようにとれる. (σ を $\mathcal{A}$ に対する **選択関数** という)

ここで $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\bigcup \mathcal{A})$ なので集合族を $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ の形に限っても同値.

選択公理 (2)

選択公理 (ver.2)

$\emptyset \notin \mathcal{A}$ かつ

$$\forall A, B \in \mathcal{A} (A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset)$$

のとき, 集合 C を

$$\forall A \in \mathcal{A} \exists c \in A (C \cap A = \{c\})$$

となるようにとれる .

この命題は「任意の同値関係に対して同値類の代表元の完全系がとれる」と読める . ($\mathcal{A}$ を商集合とみる)

選択公理 (3)

添字つき集合族 X_i ($i \in I$) に対してその積集合を

$$\prod_{i \in I} X_i = \left\{ p \mid p: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i, \forall i \in I (p(i) \in X_i) \right\}$$

と定めると、これは選択関数全体の集合にほかならず、

選択公理 (ver.3)

$$\forall i \in I (X_i \neq \emptyset) \Rightarrow \prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$$

も、選択公理の別表現となる。

選択公理 (4)

注意!!

今日のこの講義では，とくに断わらない限り，選択公理を仮定しない

整列定理 (1)

ツェルメロの整列定理 (Local Version)

任意の集合 X について次の (1) と (2) は同値

- (1) $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ が選択関数をもつ
- (2) X 上に整列順序が存在する

(2) $\Rightarrow$ (1): $\leq$ を X の整列順序づけとして, 各 $A \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ から $\leq$ -最小要素を選んで $\sigma(A)$ とすればよい.

以下, (1) $\Rightarrow$ (2) の証明.

整列定理 (2)

選択関数 $\sigma: \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow X$ を選択関数とする. 対 (u, r) が **ガンマ列** であるとは

- ① $u \subset X$
- ② r は u 上の整列順序
- ③ $x \in u$ のとき $x = \sigma(X \setminus \text{seg}(u, r, x))$ である

をみたすことだとする.
ガンマ列全体の集合を Γ とする.
 $(\emptyset, \emptyset) \in \Gamma$ なので $\Gamma \neq \emptyset$ である.

整列定理 (3)

補題

$(u_1, r_1), (u_2, r_2) \in \Gamma$ のとき, $(u_1, r_1) = (u_2, r_2)$ であるかまたは一方が他方の切片である

(黒板で説明)

整列定理 (4)

部分集合 Y と関係 R を次のように定める

$$Y = \{ x \in X \mid \exists (u, r) \in \Gamma (x \in u) \}$$
$$x R y \Leftrightarrow \exists (u, r) \in \Gamma (x, y \in u \text{ かつ } x r y)$$

このとき $(Y, R) \in \Gamma$ となる (検証略) .

ここで $Y \neq X$ と仮定すると $y^* = \sigma(X \setminus Y)$ がとれる . そこで $Y^* = Y \cup \{y^*\}$ とおき , Y の要素を R で並べたあとに y^* を置いた順序づけを R^* とすると , $(Y^*, R^*) \in \Gamma$, $y^* \in Y$ となって矛盾する . よって $Y = X$ であり , R は X 上の整列順序である . (証明終)

整列定理 (5)

ツェルメロの整列定理 (Global Version)

次の (1) と (2) は同値

- (1) 選択公理
- (2) 任意の集合上に整列順序が存在する

- この整列定理 (Global Version, 1904 年) が選択公理のメジャーデビュー作 .
- 無意識的な使用例はそれ以前からある (例: ボレルの 1898 年の講義)
- ツェルメロによる集合論の公理化の動機 (の半分) は , 集合論における選択公理の位置づけの明確化 .

ハルトークスの定理

ハルトークスの定理

任意の集合 X に対して順序数 β を単射 $\beta \rightarrow X$ が存在しないようにとれる

X の部分集合上の整列順序の順序型全体からなる集合は (順序数の推移的集合なので) 順序数である. この順序数を β とする. 単射 $f: \beta \rightarrow X$ が存在したら集合 $f''\beta \subset X$ は順序型 β の整列順序づけをもち, $\beta \in \beta$ となって矛盾する. (証明終)

ここで与えた β がハルトークスのアレフ $\aleph(X)$ である. 選択公理を用いなくても「十分大きな順序数」を構成できる.

整列定理のモダンな証明

集合 X に対し選択関数 $\sigma: \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ が与えられたとする.

●終 $\notin X$ をみたすもの ●終 を用意する. 単射 $\beta \rightarrow X$ が存在しないような順序数 β をとり, 写像 $f: \beta \rightarrow X \cup \{\text{●終}\}$ を超限再帰的に

$$f(\alpha) = \begin{cases} \sigma(X \setminus f''\alpha) & (X \not\subset f''\alpha) \\ \text{●終} & (X \subset f''\alpha) \end{cases}$$

と定める. すべての $\alpha < \beta$ で $f(\alpha) \neq \text{●終}$ ならば $f: \beta \rightarrow X$ が単射となって β のとり方に矛盾する. (続く)

整列定理のモダンな証明 (続き)

$f(\alpha) = \text{終}$ となる最小の順序数 α をとると, $f \upharpoonright \alpha: \alpha \rightarrow X$ は単射である. もしも $X \not\subseteq f''\alpha$ なら $f(\alpha) = \sigma(X \setminus f''\alpha) \neq \text{終}$ となってこれまた矛盾する. よって $f \upharpoonright \alpha: \alpha \rightarrow X$ は全単射で $\alpha \sim X$.
(証明終)

集合に要素が残っているかぎり, 残っている要素のひとつを選択関数で次々と選び続ければ, 最後には何も残らなくなり, すべての要素が整列される, というアイデア.

この論法には長い整列集合が必要になるが, ツェルメロの 1904 年の証明のときはハルトークスの構成法は知られていなかったらしい.

ツォルンの補題 (1)

半順序集合 $(X, \leq)$ において,

- 要素 $m \in X$ が **極大** であるとは, $m < x$ をみたす要素 x が存在しないことをいう.
- 部分集合 $C \subset X$ が X の **鎖** (チェーン) であるとは, どの $x, y \in C$ も $\leq$ で比較可能 ($x \leq y$ または $y \leq x$) となることをいう.
- 要素 $b \in X$ が部分集合 $A \subset X$ の **上界** であるとは, すべての $x \in A$ について $x \leq b$ であることをいう. 上界をもつ部分集合は **上に有界** であるという.
- 要素 $b \in X$ が部分集合 $A \subset X$ の **強い上界** であるとは, すべての $x \in A$ について $x < b$ であることをいう.

ツォルンの補題 (2)

ツォルンの補題

すべての鎖が上に有界であるような半順序集合には極大な要素が存在する .

ツォルンの補題 (ZL) と選択公理 (AC) が同値であることを証明する .

ツォルンの補題 (3)

[(AC) $\rightarrow$ (ZL) の証明]

半順序集合 $(X, \leq)$ のすべての鎖は上に有界だとする． $\text{終} \notin X$ となる 終 と，単射 $\beta \rightarrow X$ の存在しない順序数 β を用意し，
 $f: \beta \rightarrow X \cup \{\text{終}\}$ を超限再帰的に次のように定義する： $f \restriction \alpha \subset X$ であり，かつ $f \restriction \alpha$ に強い上界が存在するとき， $f(\alpha)$ は $f \restriction \alpha$ の強い上界全体の集合の σ による代表元とする．そうでない場合は $f(\alpha) = \text{終}$ とする．(続く)

ツォルンの補題 (4)

(続き) すべての $\alpha < \beta$ について $f(\alpha) \neq \text{終}$ とすると $f: \beta \rightarrow X$ が単射になって β のとり方に矛盾する .

そこで $f(\alpha) = \text{終}$ となる最小の順序数 α をとる . $f \upharpoonright \alpha$ は狭義単調増加写像なので , $f''\alpha$ は X の鎖であり , しかも作り方から強い上界をもたない .

半順序集合 $(X, \leq)$ についての仮定から $f''\alpha$ には上界 b が存在する . これは強い上界ではないので $b \in f''\alpha$ であって b は $f''\alpha$ の最大要素である . いま $f''\alpha$ は強い上界をもたないので , b より真に大きい X の要素は存在しない . すなわち b は X の極大要素である .

(証明終)

ツォルンの補題 (5)

[(ZL) $\rightarrow$ (AC) の証明]

集合族 $\mathcal{A}$ (ただし $\emptyset \notin \mathcal{A}$) の部分族 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ に対する選択関数 τ とのペア $(\mathcal{B}, \tau)$ 全体の集合を X とし $(\mathcal{B}, \tau) \leq (\mathcal{B}', \tau')$ とは $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ かつ $\tau = \tau' \upharpoonright \mathcal{B}$ のことだと定める. このとき $(X, \leq)$ は半順序集合で, すべての鎖は上に有界である (和集合を考えればよい).

ツォルンの補題により $(X, \leq)$ の極大要素 $(\mathcal{B}^*, \tau^*)$ が存在する. $\mathcal{B}^* \neq \mathcal{A}$ と仮定する. $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}^*$ がとれる. $A \neq \emptyset$ なので $x \in A$ がある. A に x を対応させるように τ を拡張すれば $(\mathcal{B}^*, \tau^*)$ の極大性に矛盾する. よって $\mathcal{B}^* = \mathcal{A}$ であり. τ^* が $\mathcal{A}$ に対する選択関数である. (証明終)

無限濃度の積 (1)

ここまでで

- 選択公理
- すべての集合の整列可能性
- 濃度の大小の比較可能性
- ツォルンの補題

の同値性が示された．あとひとつ，無限濃度の積の冪等性

- 任意の無限集合 X について $X \times X \sim X$

も同値である．

無限濃度の積 (2)

[(AC) $\Rightarrow$ (濃度の積の冪等性) の証明]

任意の無限基数 κ について $\kappa \times \kappa \sim \kappa$ を示す．そのために順序数のペア $\langle \xi, \eta \rangle$ と $\langle \gamma, \delta \rangle$ の間に

$$\begin{aligned}
 \langle \xi, \eta \rangle \triangleleft \langle \gamma, \delta \rangle &\Leftrightarrow \max\{\xi, \eta\} < \max\{\gamma, \delta\} \text{ または} \\
 &(\max\{\xi, \eta\} = \max\{\gamma, \delta\} \text{ かつ } (\xi < \gamma \text{ または} \\
 &(\xi = \gamma \text{ かつ } \eta < \delta)))
 \end{aligned}$$

と定める．このとき任意の順序数 α について $(\alpha \times \alpha, \triangleleft)$ は整列集合であり， $\alpha < \beta$ のとき $\alpha \times \alpha$ は $(\beta \times \beta, \triangleleft)$ の切片である．

無限濃度の積 (3)

整列集合 $(\alpha \times \alpha, \triangleleft)$ の順序型を $p(\alpha)$ とすると

$$p(0) = 0,$$

$$p(\alpha + 1) = p(\alpha) + \alpha + \alpha + 1,$$

$$p(\alpha) = \sup\{p(\beta) \mid \beta < \alpha\} \quad (\alpha \text{ が極限順序数})$$

が成立する . (黒板で説明)

無限濃度の積 (4)

最小の無限基数 ω については $p(\omega) = \omega$ である. ξ に関する帰納法の仮定として, 無限基数 ω_ξ について $p(\omega_\xi) = \omega_\xi$ と仮定する.
 $\omega_\xi \leq \alpha < \omega_{\xi+1}$ のとき, $\alpha \sim \omega_\xi$ かつ $\alpha \times \alpha \sim \omega_\xi \times \omega_\xi$ であるから

$$p(\alpha) \sim \alpha \times \alpha \sim \omega_\xi \times \omega_\xi \sim p(\omega_\xi) = \omega_\xi$$

すなわち $p(\alpha) \sim \omega_\xi$ なので $p(\alpha) < \omega_{\xi+1}$ である. α に関する上限をとって

$$p(\omega_{\xi+1}) = \sup\{p(\alpha) \mid \omega_\xi \leq \alpha < \omega_{\xi+1}\} \leq \omega_{\xi+1}$$

となる. 逆向きの $p(\omega_{\xi+1}) \geq \omega_{\xi+1}$ は $p(\alpha)$ に関する漸化式から, 超限帰納法によって明らかであるから $p(\omega_{\xi+1}) = \omega_{\xi+1}$ である.

無限濃度の積 (5)

ξ が極限順序数のとき，帰納法の仮定よりすべての $\eta < \xi$ で $p(\omega_\eta) = \omega_\eta$ であるから，

$$p(\omega_\xi) = \sup\{p(\omega_\eta) \mid \eta < \xi\} = \sup\{\omega_\eta \mid \eta < \xi\} = \omega_\xi$$

で，この場合も $p(\omega_\xi) = \omega_\xi$ である．

すべての ξ で $p(\omega_\xi) = \omega_\xi$ であるから，すべての無限基数 κ について

$$\kappa \times \kappa \sim p(\kappa) = \kappa$$

となる．(証明終)

無限濃度の積 (6)

[(濃度の積の冪等性) $\Rightarrow$ (AC) の証明]

任意の無限集合 A が与えられたとして順序数 β を単射 $\beta \rightarrow A$ が存在しないようにとる．ここで $A \cap \beta = \emptyset$ と仮定しても一般性を損わない．仮定から $(A \cup \beta) \times (A \cup \beta) \sim A \cup \beta$ であるから，単射 $f: A \times \beta \rightarrow A \cup \beta$ が存在する．各 $a \in A$ を固定したとき，対応 $\beta \rightarrow A \cup \beta; \xi \mapsto f(a, \xi)$ は β から $A \cup \beta$ への単射になっている．ところが β から A への単射は存在しないので，どの $a \in A$ に対してもある $\xi < \beta$ が存在して $f(a, \xi) \in \beta$ である．そこで各 $a \in A$ に対して $\xi_a = \min\{\xi < \beta \mid f(a, \xi) \in \beta\}$ とすると，対応 $A \rightarrow \beta; a \mapsto f(a, \xi_a)$ は A から β への単射となる．このとき A は順序数 $f(a, \xi_a)$ の大小によって整列順序づけできる．(証明終)

さて

(これ以降は次回の予習です)

有限交叉性

集合 X の部分集合の族 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ が **有限交叉性** (以下 **fip** と略す) をもつとは, 任意有限個のメンバー $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ に対して

$$A_0 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset$$

となることをいう.

フィルター

集合 X の部分集合の族 $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ が X 上の **フィルター**であるとは、条件

- (1) $X \in \mathcal{F}$ かつ $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
- (2) $A, B \in \mathcal{F}$ のとき $A \cap B \in \mathcal{F}$,
- (3) $A \in \mathcal{F}$ で $A \subset B \subset X$ ならば $B \in \mathcal{F}$

が成立していることをいう。

条件 (1) と (2) からフィルターは fip をもつ。 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ を fip をもつ族とすると、有限個の $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ について $B \supset A_0 \cap \dots \cap A_n$ をみたす $B \subset X$ 全体のなす集合族 $\mathcal{F}$ はフィルターで、 $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ である。

超フィルター (1)

集合 X の部分集合の族 $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ が X 上の **超フィルター**であるとは、まず $\mathcal{U}$ がフィルターであり、さらに

- どんな $A \subset X$ についても $A \in \mathcal{U}$ または $X \setminus A \in \mathcal{U}$ のいずれかが成立

をみたすことをいう。集合族 $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ に対して

- ① $\mathcal{U}$ は X 上の超フィルターである
- ② $\mathcal{U}$ は X 上のフィルターのうちで極大である
- ③ $\mathcal{U}$ は fip をもつ X の部分集合族のうちで極大である

は互いに同値である。

超フィルター (2)

選択公理のもとでは、 X の部分集合の fip をもつ族はすべて何らかの超フィルターに含まれる ($\mathcal{A}$ を含むフィルター全体の集合に包含関係で順序を入れると、ツォルンの補題によって fip をもつ極大な要素をとり出せる。それが $\mathcal{A}$ を含む超フィルターになっている) 。

ここまでのまとめ

集合族 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ について次のことは同値：

- $\mathcal{A}$ は fip をもつ
- X 上のあるフィルター $\mathcal{F}$ について $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ となる

選択公理のもとではこれがさらに

- X 上のある超フィルター $\mathcal{U}$ について $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$ となる
- と同値になる．