集合・濃度・順序数・基数

藤田 博司

愛媛大学理学部

2019 年 9 月 3 日
数学基礎論サマースクール 2019 @静岡大学

主な内容

- 集合と写像
- 集合の濃度
- 順序数
- 基数

集合とは (1)

集合とは

もののの集まりを全体としてひとつとみなした (概念的な) もの

ただし，どんな集まりでもいいわけではない

個々の事物が，その集まりに属するか属しないか
いちいち客観的に明確でなければならない

集合とは (2)

ある集合に集められた個々の事物をその集合の **要素** という

(例) 0 以上の整数 (自然数) 全体からなる集合を $\mathbb{N}$ と書く

0 や 1 や 2 や 43652 など $\leftarrow \mathbb{N}$ の要素である
-1 や 0.8 や $\sqrt{3}$ など $\leftarrow \mathbb{N}$ の要素でない

集合とは (3)

もの a が集合 A の要素であることを

$$a \in A$$

と表記し，要素でないことを

$$a \notin A$$

と表記する

集合とは (4)

もの a だけを要素とする集合 $\{a\}$
もの a と b だけを要素とする集合 $\{a, b\}$
もの a と b と c だけを要素とする集合 $\{a, b, c\}$ 等々

何も要素としない集合 **空集合** も考える
空集合は

$$\emptyset \quad \text{または} \quad \varnothing$$

と表記する (ϕ ではない)

集合とは (5)

条件 $P(x)$ をみたすもの x 全体の集合を

$$\{\, x \mid P(x) \,\}$$

と表記する (内包的記法)

$$\mathbb{N} = \{\, x \mid x \text{ は自然数} \,\}$$
$$\mathbb{Z} = \{\, x \mid x \text{ は整数} \,\}$$
$$\mathbb{R} = \{\, x \mid x \text{ は実数} \,\}$$

注意：条件 $P(x)$ によっては集合 $\{\, x \mid P(x) \,\}$ が作れない場合がある．(Ref: 次の酒井さんの講義)

集合とは (6)

集合 A と B について $A = B$ とは

$$\forall x \bigl(x \in A \Leftrightarrow x \in B \bigr)$$

となることである.

片側だけの

$$\forall x \bigl(x \in A \Rightarrow x \in B \bigr)$$

を $A \subset B$ と書く (A は B の **部分集合**)

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ かつ } B \subset A)$$

注意：$\subset$ を $\subseteq$ と表記する流儀もある

集合とは (7)

集合 A と B に対して

共通部分 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ **かつ** $x \in B\}$

和集合 $A \cup B = \{x \mid x \in A$ **または** $x \in B\}$

差集合 $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ **かつ** $x \notin B\}$

(論理演算が集合に対する操作に対応)

写像とは (1)

集合 A の個々の要素に B の要素がひとつ対応しているとき
この対応自体をひとつのものとみなして
A から B への **写像** と呼ぶ

$$f : A \to B$$

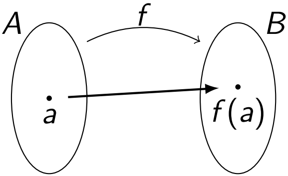
このとき A を写像 f の **定義域** といい，B を写像 f の **終域**
あるいは **ターゲット** という

写像とは (2)

写像 $f\colon A \to B$ で A の要素 a に対応する B の要素のことを

$$f(a)$$

と表記する (a に対する f の 値, または f による a の 像)



写像とは (3)

写像の例:

$\mathbb{N}$ **の要素に，その** 5 **倍を対応させる写像** $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

x	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$f(x)$	0	5	10	15	20	25	30	$\cdots$

$\mathbb{N}$ **の要素に，それを** 3 **で割った余りを対応させる写像** $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

x	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$g(x)$	0	1	2	0	1	2	0	$\cdots$

写像とは (4)

集合 X と Y の 直積集合 とは

$$X \times Y = \{\, \langle x, y \rangle \mid x \in X, y \in Y \,\}$$

($\langle x, y \rangle$ は x と y の 順序対)

写像 $f \colon X \to Y$ に対して，$X \times Y$ の部分集合

$$\Gamma(f) = \{\, \langle x, f(x) \rangle \mid x \in X \,\}$$

を f の グラフ とよぶ

集合論では原則的に写像をそのグラフと同一視する

写像とは (5)

写像 $f\colon X \to Y$ **による部分集合** $A \subset X$ **の 像**

$$f``A = \{\, f(x) \mid x \in A \,\}$$

(これは $f[A]$ **とも書く)**

部分集合 $B \subset Y$ **の 逆像**

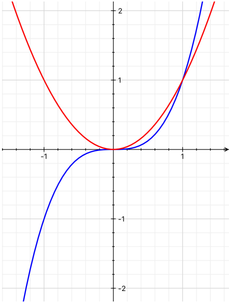
$$f^{-1}``B = \{\, x \mid x \in X \text{ で } f(x) \in B \,\}$$

(これも $f^{-1}[B]$ **とも書く)**

写像とは (6)

写像 $f\colon X \to Y$ の定義域の像 $f``X$ のことを f の **値域** という
値域が終域 Y 全体に一致する写像 (Y の **上への** 写像) のことを **全射** という

(例)



$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^3$ は全射である
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^2$ は全射ではない

写像とは (7)

写像 $f\colon X \to Y$ について，

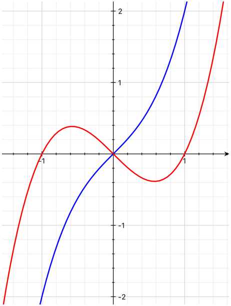
$$x \neq x' \text{ ならば } f(x) \neq f(x')$$

がつねに成立しているとき f は **単射** であるという

(例)

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^3 + x$ は単射である

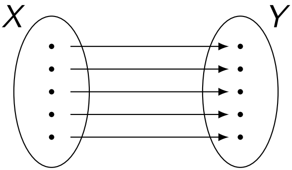
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^3 - x$ は単射でない



写像とは (8)

写像 $f\colon X \to Y$ が全射かつ単射であるとき **全単射** であるという

全単射のもとでは，X の要素と Y の要素がお互いにモレもダブりもなく対応している



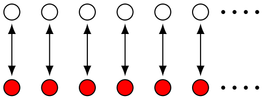
集合の対等性 (1)

集合 X から集合 Y へ全単射が存在するとき X と Y は **対等** であるといって

$$X \sim Y$$

と表記する

対等性は有限集合における「数の等しさ」を，無限集合にまで拡張したものである



集合の対等性 (2)

対等関係はひとつの同値関係

- (反射律) どんな集合 X も $X \sim X$
- (対称律) $X \sim Y$ のとき $Y \sim X$
- (推移律) $X \sim Y$ かつ $Y \sim Z$ のとき $X \sim Z$

集合の対等性 (3)

(例)

自然数全体 $\mathbb{N}$ と偶数全体 $E = \{\, 2n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ とは対等

$$
\begin{array}{cccccccc}
\mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\
E: & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots
\end{array}
$$

また $\mathbb{Z}$ も $\mathbb{N}$ と対等

$$
\begin{array}{cccccccc}
\mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\
\mathbb{Z}: & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & \cdots
\end{array}
$$

他に有理数の全体 $\mathbb{Q}$ や代数的複素数の全体も $\mathbb{N}$ と対等

集合の対等性 (4)

ところが実数の全体 $\mathbb{R}$ は $\mathbb{N}$ と対等でない (カントールの定理)

$$\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$$

集合の濃度 (1)

対等な集合は同じ **濃度** をもつという

$$\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B) \iff A \sim B$$

濃度はいわば対等関係のもとでの各集合の同値類

有限集合の濃度とは要素の個数そのもの
集合 $\mathbb{N}$ の濃度をアレフ・ゼロと呼ぶ (**可算濃度**)

$$\mathrm{Card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$$

集合 $\mathbb{R}$ の濃度を $2^{\aleph_0}$ と表記する (**連続体濃度**)

集合の濃度 (2)

集合 X から集合 Y への単射が存在するとき

$$X \precsim Y$$

と書く

- どんな集合 X についても $X \precsim X$
- $X \precsim Y$ かつ $Y \precsim X$ のとき $X \sim Y$ (ベルンシュタイン・シュレーダーの定理)
- $X \precsim Y$ かつ $Y \precsim Z$ のとき $X \precsim Z$

集合の濃度 (3)

$X \precsim Y$ かどうかは濃度 $\mathrm{Card}(X)$ と $\mathrm{Card}(Y)$ とで決まる

$$\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(Y) \overset{\text{def}}{\iff} X \precsim Y$$

この定義のもとで $\leq$ は反射律・反対称律・推移律をみたす：

- どんな濃度 a についても $\mathsf{a} \leq \mathsf{a}$
- $\mathsf{a} \leq \mathsf{b}$ かつ $\mathsf{b} \leq \mathsf{a}$ のとき $\mathsf{a} = \mathsf{b}$
- $\mathsf{a} \leq \mathsf{b}$ かつ $\mathsf{b} \leq \mathsf{c}$ のとき $\mathsf{a} \leq \mathsf{c}$

$$\mathsf{a} < \mathsf{b} \overset{\text{def}}{\iff} \mathsf{a} \leq \mathsf{b} \text{ かつ } \mathsf{a} \neq \mathsf{b}$$

集合の濃度 (4)

有限の濃度と $\aleph_0$ と $2^{\aleph_0}$ の間には

$$0 < 1 < 2 < \cdots < n < \cdots < \aleph_0 < 2^{\aleph_0}$$

の関係がある．そこで

(1) 有限の濃度と $\aleph_0$ の間に他の濃度はあるか
(2) $\aleph_0$ と $2^{\aleph_0}$ の間に他の濃度はあるか
(3) $2^{\aleph_0}$ より大きい濃度があるか

が問題になる．
(1) は $\mathbb{N}$ の無限部分集合がすべて $\mathbb{N}$ と対等になるので「ない」とわかる．(2) については池上さんの講義で明日以降やる．

集合の濃度 (5)

集合 X の部分集合全体のなす集合を X の 冪集合 といって $\mathcal{P}(X)$ と表記する

$$\mathcal{P}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{\, A \mid A \subset X \,\}$$

対応 $x \mapsto \{x\}$ によってあきらかに $X \precsim \mathcal{P}(X)$

いっぽう $\mathcal{P}(X) \sim X$ ではない (カントールの定理)

集合の濃度 (6)

したがって任意の集合 X について

$$\mathrm{Card}(X) < \mathrm{Card}\big(\mathcal{P}(X)\big)$$

が成立．とくに

$$2^{\aleph_0} < \mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$$

だから $2^{\aleph_0}$ より大きな濃度は確かに存在する

集合の濃度 (7)

(カントールの定理 $X \not\sim \mathcal{P}(X)$ の証明)

どんな写像 $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$ も全射でないことを示せば十分．
集合

$$D = \{\, x \in X \mid x \notin f(x) \,\}$$

を考える．すべての $x \in X$ について

$$x \in D \iff x \notin f(x)$$

なので，$D = f(x)$ をみたす x は存在しない．(証明終)

集合の濃度 (8)

X が n 個の要素からなる有限集合のとき $\mathcal{P}(X)$ は 2^n 個の集合からなる集合．

そこで一般に $\mathsf{a} = \mathrm{Card}(X)$ のとき $\mathcal{P}(X)$ の濃度を 2^{a} と表記する．いっぽう実数の 2 進表示を使うと

$$\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

が示せる．(この理由で $\mathrm{Card}(\mathbb{R})$ を $2^{\aleph_0}$ と書いた)

集合の濃度 (9)

カントールの定理により $\mathrm{Card}(X) < \mathrm{Card}(\mathcal{P}(X))$ なので，
最大の濃度は存在しない．

$$\mathbb{N} \precnsim \mathcal{P}(\mathbb{N}) \precnsim \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \precnsim \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))) \precnsim \cdots$$

それらすべての和集合

$$X = \mathbb{N} \cup \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \cup \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))) \cup \cdots$$

の濃度も最大ではない

濃度の演算 (1)

濃度 a と b の和と積:

$$\mathbf{a} = \mathrm{Card}(A), \quad \mathbf{b} = \mathrm{Card}(B), \quad A \cap B = \emptyset$$

となるように集合 A **と** B **をとり**

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= \mathrm{Card}(A \cup B) \\ \mathbf{ab} &= \mathrm{Card}(A \times B) \end{aligned}$$

と定める．(**集合** A, B **の選び方によらず定まる**)

濃度の演算 (2)

濃度の和と積は交換法則・結合法則をみたす:

$$
\begin{aligned}
a + b &= b + a & \qquad ab &= ba \\
a + (b + c) &= (a + b) + c & \qquad a(bc) &= (ab)c
\end{aligned}
$$

和に対する積の分配法則をみたす

$$
a(b + c) = ab + ac \qquad (a + b)c = ac + bc
$$

濃度の演算 (3)

無限濃度は和や積にかんする消約法則をみたさない

$$0 + \aleph_0 = 1 + \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$
$$1\aleph_0 = 2\aleph_0 = \aleph_0\aleph_0 = \aleph_0$$

濃度の演算 (4)

集合 A から B への写像全体の集合を ${}^{A}B$ と表記する

$$ {}^{A}B = \{\, f \mid f : A \to B \,\} $$

$\mathrm{Card}(A) = \mathbf{a}$, $\mathrm{Card}(B) = \mathbf{b}$ **のとき，**

$$ \mathbf{b}^{\mathbf{a}} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Card}\left({}^{A}B\right) $$

と定義する (集合 A, B の選び方によらず定まる)

濃度の演算 (5)

濃度の指数演算はおなじみの指数法則をみたす

$$\mathbf{a}^0 = 1 \qquad \mathbf{a}^1 = \mathbf{a} \qquad 1^{\mathbf{a}} = 1$$

$$\mathbf{a}^{\mathbf{b}+\mathbf{c}} = \mathbf{a}^{\mathbf{b}}\mathbf{a}^{\mathbf{c}} \qquad (\mathbf{a}\mathbf{b})^{\mathbf{c}} = \mathbf{a}^{\mathbf{c}}\mathbf{b}^{\mathbf{c}} \qquad \mathbf{a}^{\mathbf{b}\mathbf{c}} = (\mathbf{a}^{\mathbf{b}})^{\mathbf{c}}$$

整列集合 (1)

集合 X 上の二項関係 $\leqslant$ が

- (反射律) すべての $x \in X$ について $x \leqslant x$
- (反対称律) $x \leqslant y$ かつ $y \leqslant x$ のとき $x = y$
- (推移律) $x \leqslant y$ かつ $y \leqslant z$ のとき $x \leqslant z$

をみたすならば，$\leqslant$ は X 上の **半順序** と呼ばれる

整列集合 (2)

集合 X 上の半順序 $\leqslant$ がさらに

- (比較可能性) どの $x, y \in X$ についても

$$x \leqslant y \text{ または } y \leqslant x$$

  が成立

をみたすならば，$\leqslant$ は X 上の **全順序** と呼ばれる

集合 X と X 上の全順序 $\leqslant$ を組にした構造 $(X, \leqslant)$ のことをひとつの **全順序集合** (または 線形順序集合) という

整列集合 (3)

全順序集合では

$$x < y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x \leqslant y \text{ かつ } x \neq y$$

と定めた **非反射的順序づけ** **が重要．関係** $<$ **が非反射的全順序であることは**

- **(非反射律) どんな** $x \in X$ **についても** $x < x$ **は成立しない**
- **(推移律)** $x < y$ **かつ** $y < z$ **のとき** $x < z$
- **(三択律) どの** $x, y \in X$ **についても**

  $$x < y \text{ または } y < x \text{ または } x = y$$

  が成立

の 3 **条件で特徴づけできる**

整列集合 (4)

集合 X 上の全順序 $\leqslant$ が

- (最小値条件) X の空でない部分集合はすべて $\leqslant$ に関する最小要素をもつ

をみたすとき $\leqslant$ のことを **整列順序** という

このとき全順序集合 $(X, \leqslant)$ のことをひとつの **整列集合** という

整列集合 (5)

整列順序の例:

- 有限集合上の全順序
- 自然数の通常の順序
- 偶数を昇順にすべて並べたあとに奇数を昇順に並べた順序 $\leqslant_2$:

$$0 <_2 2 <_2 4 <_2 \cdots <_2 1 <_2 3 <_2 5 <_2 \cdots$$

整列集合 (6)

整列順序においては無限降下列

$$x_0 > x_1 > x_2 > x_3 > \cdots$$

は存在しない．

したがって $\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$ の通常の順序は整列順序でない

帰納法原理 (1)

帰納法原理

整列集合 $(X, \leqslant)$ の要素にかんする述語 $P(x)$ について

$$\forall x \in X \big((\forall y < x \, P(y)) \Rightarrow P(x) \big)$$

が成立するならば，

$$\forall x \in X \; P(x)$$

である

($\because$ $P(x)$ が成立しない要素 x の集合が空でないとして，その最小要素を考えると矛盾)

帰納法原理 (2)

そこで，整列集合 $(X, \leqslant)$ のすべての要素 x について $P(x)$ が成立することを証明するさい，$y < x$ であるような y について $P(y)$ が成立することを仮定してさしつかえない

この証明の方法を **超限帰納法** という

《$y < x$ ならば $P(y)$》 は **帰納法の仮定** と呼ばれる

再帰原理 (1)

整列集合 $(X, \leqslant)$ の各要素 x について何か $f(x)$ を定義するさい，$y < x$ であるような y について $f(y)$ がすでに定義されていることを仮定してさしつかえない

整列集合 $(X, \leqslant)$ の要素 x に対して

$$\mathrm{seg}(X, \leqslant, x) \stackrel{\text{def}}{=} \{\, y \in X \mid y < x \,\}$$

(X の x における **切片**)

写像 $f\colon X \to Y$ の $A \subset X$ への制限写像を $f \restriction A$ と書く

再帰原理 (2)

再帰原理

整列集合 $(X, \leqslant)$，集合 Y，ある "十分大きな" 集合 U があって，写像

$$g\colon X \times U \to Y$$

が与えられているとき，写像 $f\colon X \to Y$ で，条件

$$\forall x \in X\bigl(f(x) = g(x, f \restriction \mathrm{seg}(X, \leqslant, x))\bigr)$$

をみたすものが，一意に存在する．(ただし，X の各切片から Y への写像がすべて U に属するほど，U は大きいとする．)

順序数 (1)

再帰による定義の例として，

$$\rho_{\mathrm{X}}(x) = \mathrm{range}\big(\rho_{\mathrm{X}} \restriction \mathrm{seg}(X, \leqslant, x)\big)$$

をみたす写像 $\rho_{\mathrm{X}}\colon X \to U$ を考える (U は十分大きい集合)
たとえば $(\mathbb{N}, \leq)$ の場合，

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathbb{N}}(0) &= \emptyset, \\
\rho_{\mathbb{N}}(1) &= \{\emptyset\}, \\
\rho_{\mathbb{N}}(2) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \\
\rho_{\mathbb{N}}(3) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},
\end{aligned}$$

等々となる

順序数 (2)

集合 a が **推移的** であるとは

$$x \in y \in a \Rightarrow x \in a$$

となること

$\rho_{\mathbb{N}}$ の値 $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 等々はすべて推移的である

順序数 (3)

一般の整列集合 $(X, \leqslant)$ **について**

- **値域** $\mathrm{range}(\rho_{\mathrm{X}})$ **と各** $\rho_{\mathrm{X}}(x)$ **は推移的集合**
- $x, y \in X$ **のとき**

$$\begin{aligned} x < y &\iff \rho_{\mathrm{X}}(x) \in \rho_{\mathrm{X}}(y) \\ x \leqslant y &\iff \rho_{\mathrm{X}}(x) \subset \rho_{\mathrm{X}}(y) \end{aligned}$$

  であり，$\mathrm{range}(\rho_{\mathrm{X}})$ **上で** $\in$ **は非反射的整列順序，**$\subset$ **は反射的整列順序になっている**
- $\rho_{\mathrm{X}} \colon (X, <) \simeq (\mathrm{range}(\rho_{\mathrm{X}}), \in)$ **(順序集合として同型)**

順序数 (4)

整列集合 $(X, \leqslant)$ **に対して** $\mathrm{range}(\rho_X)$ **を** $(X, \leqslant)$ **の** **順序型** **と よんで** $\mathrm{otp}(X, \leqslant)$ **と書く**

- $\mathrm{otp}(X, \leqslant)$ **は推移的集合**
- $\in$ **は** $\mathrm{otp}(X, \leqslant)$ **上で** $(X, <)$ **と同型な非反射的整列順序**
- $(X, \leqslant_X)$, $(Y, \leqslant_Y)$ **を整列集合とするとき**

$$(X, \leqslant_X) \simeq (Y, \leqslant_Y) \iff \mathrm{otp}(X, \leqslant_X) = \mathrm{otp}(Y, \leqslant_Y)$$

$\in$ **による整列集合としての** $\mathrm{otp}(X, \leqslant)$ **は，整列集合の順序同型に関する同値類の代表になっている**

順序数 (5)

集合 a について次の (1) と (2) は同値

(1) a **はある整列集合の順序型である**

(2) a **は推移的集合で，$\in$ は a 上で非反射的整列順序である**

条件 (1)(2) をみたす集合 a のことを 順序数 という

順序数の性質 (1)

- (非反射律) どんな順序数 α についても $\alpha \notin \alpha$
- (推移律) $\alpha \in \beta \in \gamma$ のとき $\alpha \in \gamma$
- (三択律) $\alpha \in \beta$，$\beta \in \alpha$，$\alpha = \beta$ のいずれかが成立

そこで α と β が順序数のとき，$\alpha \in \beta$ のことを $\alpha < \beta$ と書く

- (最小値条件) u を順序数からなる空でない集合とすると u には最小要素が存在する (u に属する順序数全部の共通部分が u の最小要素)

順序数の性質 (2)

順序数 α **に対して** $S(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \cup \{\alpha\}$ **は順序数で，**

$$\alpha < \beta \iff S(\alpha) \leq \beta$$

となる (α **の 直後の 順序数**)

順序数の性質 (3)

$\emptyset$ とそれに続く順序数を自然数と同一視する:

$$
\begin{aligned}
0 &= \emptyset, \\
1 &= S(0) = \{\emptyset\}, \\
2 &= S(1) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
3 &= S(2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

一般に自然数 n は集合

$$n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

である

順序数の性質 (4)

整列集合 $(\mathbb{N}, \leq)$ の順序型は

$$\{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$$

なので，$\mathbb{N}$ そのものと同一視される

順序数としての $\mathbb{N}$ のことを ω と表記する

順序数の性質 (5)

- ある β について $\alpha = S(\beta)$ となる順序数 α を **後続型順序数** という
- 0 でも後続型順序数でもない順序数を **極限順序数** という

順序数の算術 (1)

順序数 α に後者演算 S を β 回繰り返し適用した結果得られる順序数が $\alpha + \beta$ である

- $\alpha + 0 = \alpha$,
- $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$,
- β が極限順序数のとき $\alpha + \beta = \sup\{\, \alpha + \gamma \mid \gamma < \beta \,\}$

これは再帰的定義の例になっている

順序数の算術 (2)

順序数の和は結合法則と右消約法則をみたす

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$
$$\alpha + \beta = \alpha + \gamma \text{ ならば } \beta = \gamma$$

順序数の和は交換法則と左消約法則をみたさない

$$1 + \omega = \omega < \omega + 1$$
$$1 + \omega = \omega = 0 + \omega \text{ かつ } 1 \neq 0$$

順序数の算術 (3)

順序数の積は順序数の和の繰り返し

- $\alpha\,0 = \alpha$,
- $\alpha\,S(\beta) = (\alpha\,\beta) + \alpha$,
- β **が極限順序数のとき** $\alpha\,\beta = \sup\{\,\alpha\,\gamma \mid \gamma < \beta\,\}$

順序数の算術 (4)

順序数の積は結合法則と右分配法則と右消約法則をみたす

- $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
- $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$
- $\alpha\beta = \alpha\gamma$ **かつ** $\alpha \neq 0$ **のとき** $\beta = \gamma$

順序数の積は交換法則も左分配法則も左消約法則もみたさない

$$\begin{aligned}(\omega + 1)\omega &= \omega\omega \\ &\neq \omega\omega + \omega \\ &= \omega(\omega + 1)\end{aligned}$$

基数 (1)

自分より小さな順序数と対等にならない順序数のことを **基数** という

$$\alpha\ \text{が基数} \overset{\text{def}}{\iff} \forall\beta<\alpha\big(\beta\not\sim\alpha\big)$$

自然数と ω はいずれも基数である

ω より大きな基数も存在する

基数 (2)

ハルトークスの定理

どんな集合 a に対しても，順序数 β を，単射 $f\colon \beta \to a$ が存在しないようにとれる．

集合 a に対してそのような β の最小値を $\aleph(a)$ とすると

$$\aleph(a) = \{\, \mathrm{otp}(u, r) \mid u \subset a, r \text{ は } u \text{ 上の整列順序} \,\}$$

基数 (3)

任意の集合 a に対して $\aleph(a)$ は基数であり $\aleph(a) \not\precsim a$

再帰によって **オメガ系列** を

- $\omega_0 = \omega$
- $\omega_{\alpha+1} = \aleph(\omega_\alpha)$
- α が極限順序数のとき $\omega_\alpha = \sup\{\, \omega_\beta \mid \beta < \alpha \,\}$

と定義する．ω_α のことを $\aleph_\alpha$ とも書く

どの ω_α も無限基数であり，無限基数はすべてある ω_α である

$$\alpha < \beta \iff \omega_\alpha < \omega_\beta$$

基数 (4)

任意の集合 a に対して $\aleph(a)$ は基数であり $\aleph(a) \not\precsim a$

濃度の比較可能性

次の (1) と (2) は同値

(1) 任意の濃度 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ について

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \text{ または } \mathbf{b} \leq \mathbf{a}$$

のいずれかが成立

(2) すべての集合上に整列順序が存在する

基数 (5)

集合 X が整列順序づけ可能であるとき，

$$|X| \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\, \alpha \mid \alpha \sim X \,\}$$

と定める．$|X|$ は基数である

X と Y が整列可能ならば

$$|X| = |Y| \iff X \sim Y$$

なので，基数 $|X|$ を X の濃度の別名として利用できる