静岡大学大学院総合科学技術研究科

修士課程・理学専攻・数学コース

２０２６年度入学試験問題

２次募集

専門（数学）

注意事項

$\boxed{\text{E}}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ すべてに解答せよ.

解答用紙は問題ごとに別にし, 各用紙に問題番号を明記せよ.

紙面が不足した場合は解答用紙の裏面を使用してもよい.

$\boxed{\mathrm{E}}$ 次の命題を英語で書け．さらに，その証明を英語で書け．ただし，論理記号（$\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$ など）を使わないこと．

(1) 集合 X と Y, および写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to X$ に対して，f と g の合成写像 $g \circ f : X \to X$ は X 上の恒等写像であるとする．このとき，f は単射であり，g は全射である．

(2) X と Y を距離空間，$f : X \to Y$ を連続写像，$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を X の収束列とする．このとき，$\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は Y の収束列である．

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ.

(1) $a > b > 0$ とする. $a_1 = a,\ b_1 = b,$

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3},\ b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3},\quad (n \geq 1)$$

として数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定める. このとき,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{a+b}{2}$$

であることを示せ.

(2) $a_n = \dfrac{\log n}{\sqrt{n}}$ として数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定める.

このとき, 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ が収束することを示せ.

(3) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy$ の極値を全て求めよ.

(4) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq x\}$ とする.

このとき, 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2\ dxdy$ の値を求めよ.

$\boxed{2}$ V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元計量ベクトル空間とする.

V 上の内積を $(\cdot,\cdot)$ で表わすとき, 次の各問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{v_1},\dots,\boldsymbol{v_r} \in V$ が V の正規直交系であるとは, 任意の $i,j \in \{1,\dots,r\}$ に対し $(\boldsymbol{v_i},\boldsymbol{v_j}) = \delta_{ij}$ となるときにいう. ここで, δ_{ij} はクロネッカーのデルタである.

正規直交系は一次独立であることを示せ.

(2) 線形写像 $f\colon V \to V$ は計量を保つとする. すなわち, 任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$ に対し $(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が成り立つとする.

$\boldsymbol{v_1},\dots,\boldsymbol{v_n} \in V$ を V の正規直交基底とするとき, $f(\boldsymbol{v_1}),\dots,f(\boldsymbol{v_n})$ も V の正規直交基底であることを示せ. ここで正規直交基底とは, 正規直交系からなる基底のことをいう.

(3) ${}^tPP = E$ なる実正方行列 P を直交行列という. ここで, E は単位行列であり, ${}^tP$ は P の転置行列を表わす.

P が直交行列のとき P は正則であり, その逆行列は ${}^tP$ である. このことを説明せよ.

(4) $\mathbb{R}^n$ には標準的内積が入っているものとする. ここで $\mathbb{R}^n$ の標準的内積とは, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ で与えられるものである.

n 次実正方行列 P に対し, 次は同値であることを示せ.

(i) P は直交行列である.

(ii) $P = (\boldsymbol{p_1},\dots,\boldsymbol{p_n})$ とするとき, $\boldsymbol{p_1},\dots,\boldsymbol{p_n}$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底をなす.

(iii) $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し $P\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を対応させる ($\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線形) 写像を T_P とするとき, T_P は計量を保つ.

(5) 次の対称行列 A を直交行列により対角化せよ:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{\sqrt{6}} & -\frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \frac{3}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{3}$ X を実数全体の集合 $\mathbb{R}$ とする.

$$\mathcal{B} = \{\ [a, b) \subset \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\ \}$$

を開基として X の位相を定める. 次の各問に答えよ.

(1) 半開区間 $[a, b)$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$ は X の開集合であり, かつ, 閉集合であることを示せ.

(2) X の部分空間 A について, A が 2 つ以上の元を含むとき, A は連結でないことを示せ.

(3) 閉区間 $I = [0, 1]$ は X の閉集合になることを示せ.

(4) X の部分空間 $I = [0, 1]$ はコンパクトにならないことを示せ.

(5) $I = [0, 1]$ を含む任意の X の部分空間 A はコンパクトにならないことを示せ.

(6) X のコンパクトな部分空間で, 元の数が有限でない例を一つ与えよ. また, 与えた例がコンパクトになる理由を説明せよ.

(7) X の部分空間 $I = [0, 1]$ 上の実数値連続関数は有界とは限らないことを示せ.