

2026 年度
静岡大学大学院総合科学技術研究科
修士課程・理学専攻・物理学コース
一般入試

専門（物理学）

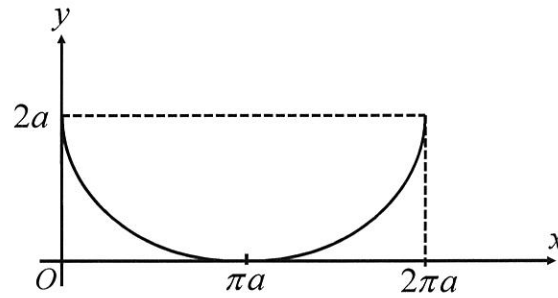
<注意事項>

1. 問題は【1】～【3】の3問であり、配点は各問題に記載されている。
2. 解答用紙は問題ごとに別にし、それぞれに受験番号と問題番号を記入せよ。
裏面を使用しても良い。
3. 解答には途中の導き方を示すこと。

【1】 以下の問いに答えよ。(配点 34%)

- (1) 一様な重力下（重力加速度の大きさ g ）で鉛直方向を y 軸として、以下の様なサイクロイド曲線に束縛された質量 m の質点の運動を考える。

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 + \cos \theta), \quad a > 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$



- (a) 運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー U を θ の関数として求めよ。
- (b) Lagrange の関数 (Lagrangian) L を求め、一般化座標 θ に関する Lagrange の方程式から質点の運動方程式を導け。
- (c) 軌跡に沿った微小線素 ds が $ds^2 = dx^2 + dy^2$ と表されることから $ds/d\theta = 2a \sin(\theta/2)$ であることを示し、 $\theta = 0$ の点から軌跡に沿って測った長さ $s(\theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) を求めよ。
- (d) (b) で得られた運動方程式を s に関する運動方程式に変換し、 $s = 0$ から初速度 0 で運動する場合の解を求めよ。
- (e) (d) の結果から分かることを述べよ。
- (2) 一様な電磁場 ($\mathbf{E} = E\mathbf{e}_y, \mathbf{B} = B\mathbf{e}_z, E > 0, B > 0$) 中で質量 m 、電荷 $q(> 0)$ の粒子の運動を考える。ただし、重力は無視できるとする。また、運動中の速度の大きさは光速の大きさより十分小さいとし、荷電粒子の加速度運動による輻射も無視できるとする。
- (a) $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z$ として各成分ごとの運動方程式を導け。
- (b) 初期条件 $\mathbf{r}(0) = 0, \dot{\mathbf{r}}(0) = 0$ の下で運動方程式を解くとき、 xy 平面内の運動だけを考えれば良いことが分かる。理由を説明せよ。ここで $\dot{\mathbf{r}}$ は時間に関する 1 階の導関数で速度である。
- (c) xy 平面内の運動を考えるので $u(t) = x(t) + iy(t)$ という複素関数を用いて $u(t)$ に関する運動方程式を与えられた初期条件の下で解き、 $x(t)$ および $y(t)$ を求めよ。解はサイクロトロン角振動数 $\omega = qB/m$ 、ドリフト速度 $\mathbf{v}_d = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})/|\mathbf{B}|^2$ の大きさ $v_d = |\mathbf{v}_d|$ を用いて表すこと。
- (d) 荷電粒子の軌跡の概形を図示せよ。

【2】下記の問題に答えよ。(配点 33%)

- (1) 体積 V の容器の中に、体積 v の穴の空いた箱を入れた ($v < V$)。そして容器の中に N 個の相互作用しない分子を封入した。この分子は容器の中を自由に運動し、箱にも自由に出入りできる。箱の厚さは薄く、無視できるものとする。

- (a) 1 個の分子に注目する。この分子が体積 v の箱に入っている確率を w とする。 w を求めよ。
- (b) 体積 v の箱に n 個の分子が入っている確率を $P(n)$ とする。 $P(n)$ を求めよ。答案に w を用いて良い。
- (c) e^{nt} の期待値、 $\langle e^{nt} \rangle = \sum_{n=0}^N e^{nt} P(n)$ を求めよ。答案に w を用いて良い。
- (d) n の期待値 $\langle n \rangle$ と分散 $\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$ を求めよ。答案に w を用いて良い。
- (e) $v = V/2$ の場合を考える。このとき体積 $V/2$ の箱に入っている分子の数の期待値は $N/2$ となることが予測できる。そこで $n = N/2 + x$ とし、 N が十分大きい数で、 x が N に比べて十分小さいと仮定する。この仮定のもとで $\log P(n)$ を評価し、 $P(n = N/2 + x)$ が次のガウス関数に比例することを導き、正の定数 a を求めよ。

$$P(n = N/2 + x) \propto \exp(-ax^2) \quad [1]$$

ただし [1] 式右辺の比例係数は導出しなくて良い。スターリングの公式 $\log(M!) \approx M \log M - M$ 、($M \gg 1$) 及び $y = 0$ におけるテイラー展開 $\log(1+y) = y - y^2/2 + \dots$ 、($|y| < 1$) を用いて良い。

- (2) 断熱された体積 V の容器の中に N 個の単原子分子からなる理想気体が封入されており、熱平衡状態となっている。この容器内の気体の内部エネルギーを U とすると、この気体のエントロピーは

$$S = Nk_B \log \left[\frac{V}{V_0} \left(\frac{U}{U_0} \right)^{3/2} \left(\frac{N_0}{N} \right)^{5/2} \right] \quad [2]$$

となる。ただし、 V_0 、 U_0 、 N_0 は正の定数で、 k_B はボルツマン定数である。必要ならば次の関係式を用いて良い。

$$dU = TdS - pdV + \mu dN \quad [3]$$

ここで T 、 p 、 μ はそれぞれ気体の温度、圧力、化学ポテンシャルである。

- (a) この理想気体の状態方程式を [2] 式から導出せよ。
- (b) この理想気体の定積比熱 $C_V = T(\partial S/\partial T)_{V,N}$ と定圧比熱 $C_p = T(\partial S/\partial T)_{p,N}$ を [2] 式から導出せよ。
- (c) 問題 (1)(e) において、小さい箱の体積が $v = V/2$ の場合、箱に入っている分子の数の期待値が $N/2$ になることを確率論にもとづき考察した。これを熱力学にもとづき考察する。問題 (1) における体積 V の容器が断熱されており、分子が単原子分子とする。この分子からなる気体を理想気体とみなし、容器内が熱平衡状態にあるとするとエントロピーの式 [2] が成立する。[2] 式とエントロピー最大則を利用することで、体積 $V/2$ の箱に入っている分子の数の期待値が $N/2$ となることを示せ。
ヒント：容器内を仮想的な断熱壁で分割すると、分割された部分ごとに [2] 式（ただし、 U 、 V 、 N は部分ごとに異なる）が成立する。

【3】 質量 m の粒子が以下のポテンシャル $V(x)$ のもとで運動する。

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (|x| < l) \\ \infty & (|x| \geq l) \end{cases}$$

ここで、 l は正の定数である。この粒子の波動関数 $\psi(x, t)$ は、シュレディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi, \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

にしたがう。 $|x| \geq l$ では $\psi = 0$ であることに注意して、以下の問いに答えよ。(配点 33%)

- (1) $\psi(x, t)$ が $\psi(x, t) = c(t)\varphi(x)$ の形をとるとする。ここで、 $\varphi(x)$ はエネルギー E に対する規格化されたエネルギー固有関数であり、 $c(0) = 1$ であるとする。シュレディンガー方程式より、 $c(t)$ を E を用いて表せ。
- (2) 基底状態のエネルギー E_0 と規格化されたエネルギー固有関数 $\varphi_0(x)$ を求めよ。
- (3) 第 1 励起状態のエネルギー E_1 と規格化されたエネルギー固有関数 $\varphi_1(x)$ を求めよ。
- (4) φ_0 と φ_1 が直交していることを示せ。

以下の (5)～(9) の解答には、上の E_0 、 E_1 、 φ_0 、 φ_1 を用いてよい。

- (5) 時刻 $t = 0$ で、 $\psi(x, 0) = (\varphi_0(x) + \varphi_1(x))/\sqrt{2}$ であるとする。このとき、時刻 t における $\psi(x, t)$ を求めよ。
- (6) (5) のとき、 x の期待値は原点を中心とした単振動をする。この単振動の周期と振幅を求めよ。
- (7) (5) のとき、 $0 \leq x \leq l$ に粒子が見出される確率は時刻に依存する。この確率の最大値を求めよ。

次に、2 つの同種粒子が上のポテンシャルのもとで運動する場合を考える。粒子のスピンと粒子間の相互作用は無視できるものとする。

- (8) 2 つの粒子がボーズ粒子のとき、基底状態のエネルギーと規格化されたエネルギー固有関数を求めよ。
- (9) 2 つの粒子がフェルミ粒子のとき、基底状態のエネルギーと規格化されたエネルギー固有関数を求めよ。