

静岡大学大学院総合科学技術研究科
修士課程・理学専攻・数学コース

令和8年度入学試験問題

専門（数学）

注意事項

E	1	2	3
---	---	---	---

 すべてに解答せよ。

解答用紙は問題ごとに別にし、各用紙に問題番号を明記せよ。

紙面が不足した場合は解答用紙の裏面を使用してもよい。

E

次の命題の証明を英語で書け. ただし, 論理記号 ($\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$ など) を使わないこと.

- (1) 実数の数列 $\{a_n\}_{n=1,2,3,\dots}$ がコーシー列 (基本列) であるとし, さらに, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 0$ であるとする. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ である.
- (2) X, Y, Z を集合とし, f を X から Y への写像, g を Y から Z への写像とする. g が単射であり, さらに, 合成写像 $g \circ f$ が全射であるとする. このとき, f は全射である.

1

次の各問に答えよ.

- (1) 区間 $[0, \infty)$ 上の実数値連続関数 $f(x)$ で, $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \geq t} f(x) = 1$ を満たすものを考える. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$ を満たし, 正の無限大に発散する実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することを証明せよ.

- (2) 実数 α に対し, 関数項級数

$$f_{\alpha}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}, \quad g_{\alpha}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\alpha}}$$

を考える. k を非負整数とする. $\alpha > k+1$ のとき, $f_{\alpha}(x), g_{\alpha}(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の C^k 級関数を定めることを証明せよ.

- (3) $\mathbb{R}^2$ 上の実数値 C^2 級関数 $h(x, y)$ で, $\Delta h = 0$ を満たすものを考える. ただし, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ はラプラシアンを表す. $f(x, y) = h(x^2 - y^2, 2xy)$ により $\mathbb{R}^2$ 上の実数値関数 $f(x, y)$ を定める. このとき, $\Delta f = 0$ が成り立つことを証明せよ.

- (4) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ かつ } y \geq 0\}$ とする. 重積分

$$\iint_D ye^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$$

を求めよ.

2

V を $\mathbb{C}$ 上 n 次元ベクトル空間, $f: V \rightarrow V$ を線形写像とする. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) 次の用語の定義を正確にかけ.

- (i) V は部分空間 W_1, W_2 の和空間である.
- (ii) V は部分空間 W_1, W_2 の直和である.
(このとき $V = W_1 \oplus W_2$ とかく.)
- (iii) n 次正方行列 $(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ は V の基底 $\{v_1, \dots, v_n\}$ に関する f の表現行列である.

(2) f が $f \circ f = f$ を満たすとするとき, 次の命題を示せ.

- (i) $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\}$.
- (ii) $V = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.
- (iii) ある V の基底 $\{v_1, \dots, v_n\}$ が存在して, その基底に関する f の表現行列は, 成分が 0 または 1 の対角行列である.

(3) 線形写像 $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ を $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \end{pmatrix}$ で定義するとき, f の表現行列が, 成分が 0 または 1 の対角行列となるような $\mathbb{C}^2$ の基底を一つ求めよ.

3

位相空間 X の部分集合 A に対して, $\text{Int}_X A$ を X における A の内部, $\text{Cl}_X A$ を X における A の閉包とする.

X と Y を位相空間, $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする.

次の各問に答えよ.

- (1) X の部分集合 A について, $X - \text{Int}_X(X - A) = \text{Cl}_X A$ を示せ.
- (2) X の部分集合 A について, $X - \text{Cl}_X(X - A) = \text{Int}_X A$ を示せ.
- (3) 次の (i) は, $f: X \rightarrow Y$ が開写像になるための必要十分条件であることを示せ.
 - (i) 任意の $A \subseteq X$ について, $f(\text{Int}_X A) \subseteq \text{Int}_Y f(A)$
- (4) 次の (ii) は, $f: X \rightarrow Y$ が閉写像になるための必要十分条件であることを示せ.
 - (ii) 任意の $A \subseteq X$ について, $\text{Cl}_Y f(A) \subseteq f(\text{Cl}_X A)$
- (5) 全射で連続な閉写像 $f: X \rightarrow Y$ で開写像でない例を与えよ.
- (6) 全射で連続な開写像 $f: X \rightarrow Y$ で閉写像でない例を与えよ.