

抽象発展方程式について

松本 敏隆 (静岡大学理学部)



2025 年 10 月 16 日 (木)
サイエンスカフェ in 静岡

発展方程式って??

- 発展方程式

時間変数 t に関する微分を含む具体的な微分方程式のこと.

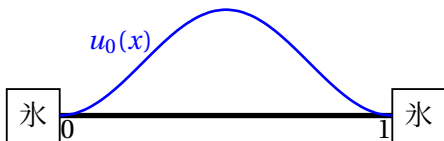
すなわち, 時間とともに状態が変化する具体的な現象を記述する微分方程式のこと.

例. 熱方程式, 波動方程式, シュレディンガー方程式,
化学反応の方程式, 人口動態, 感染症モデルなど.

例. 熱方程式

長さ 1 の針金の両端 $x=0$ と $x=1$ を氷で冷やすことによって
温度を 0 度に保つ状況を考えます.

時刻 $t=0$ での針金の温度分布を $u_0(x)$ とします.



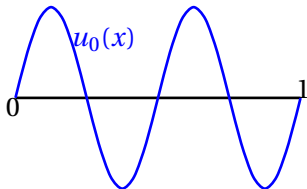
時刻 t , 場所 x の温度 $u(t, x)$ は次の微分方程式を満たします:

$$(HE) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), & (t > 0, 0 < x < 1), \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & (t > 0), \\ u(0, x) = u_0(x) & (0 \leq x \leq 1). \end{cases}$$

例. 波動方程式 (波, 音, 地震, 電磁波など)

長さ 1 の弦の両端 $x=0$ と $x=1$ を固定します.

時刻 $t=0$, 場所 x での弦の変位を $u_0(x)$ とします.



時刻 t , 場所 x での弦の変位 $u(t, x)$ は次の微分方程式を満たします:

$$(WE) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), & (t > 0, 0 < x < 1), \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & (t > 0), \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1(x) & (0 \leq x \leq 1). \end{cases}$$

- 抽象発展方程式

バナッハ空間における時間変数 t に関する微分を含む方程式のこと.

$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t) \quad (t > 0); \quad u(0) = u_0.$$

- 抽象発展方程式を考える理由

(1) 純粋に数学的な興味.

(2) 具体的な微分方程式は, 適切なバナッハ空間と作用素 A を設定することで抽象発展方程式に書き換えることができる.

作用素 A がどのような性質を満たせば解の存在・一意性が成立するかを研究することで, 出来るだけ多くの微分方程式の解の存在・一意性をまとめて扱うことができる理論を構築したい.

抽象発展方程式への書き換えの例として熱方程式 (HE) を考えます.

$$(HE) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), & (t > 0, 0 < x < 1), \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & (t > 0), \\ u(0, x) = u_0(x) & (0 \leq x \leq 1). \end{cases}$$

X を $[0, 1]$ 上の連続関数 $v(x)$ で $v(0) = v(1) = 0$ を満たすものの全体の集合とします.

$$(HE) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), & (t > 0, 0 < x < 1), \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & (t > 0), \\ u(0, x) = u_0(x) & (0 \leq x \leq 1). \end{cases}$$

連続な解 $u(t, x)$ は t を固定すると, x の関数として X に属します.

そこで, $u(t, x)$ を区間 $[0, \infty)$ から集合 X への写像 (対応)

$$t \mapsto u(t, \cdot) \in X$$

と見做して, $u(t, \cdot)$ を単に $u(t)$ と表すことにします.

これにより, (HE) は X における抽象発展方程式の初期値問題

$$(ACP) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Au(t) & (t > 0) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

に書き直すことが出来ます. 但し,

$$Av = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad D(A) = \{v \in X : Av \in X\}.$$

バナッハ空間

- 大学でのベクトル空間の定義は以下のようになります。

定義 1. (ベクトル空間)

集合 V が次の条件 (I), (II) を満たすときベクトル空間という:

(I) V に和が定義されていて次を満たす:

(i) $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h} \in V$ に対して

$$\mathbf{f} + \mathbf{g} = \mathbf{g} + \mathbf{f}, \quad (\mathbf{f} + \mathbf{g}) + \mathbf{h} = \mathbf{f} + (\mathbf{g} + \mathbf{h}).$$

(ii) すべての $\mathbf{f} \in V$ に対して $\mathbf{f} + \mathbf{0} = \mathbf{f}$ をみたす元 $\mathbf{0} \in V$ が存在する.

(iii) 任意の $\mathbf{f} \in V$ に対して $\mathbf{f} + \mathbf{g} = \mathbf{0}$ をみたす $\mathbf{g} \in V$ が存在する.

この $\mathbf{g}$ を $-\mathbf{f}$ と表す.

定義 1. (ベクトル空間) 続き

(II) 任意の実数 α と $\mathbf{f} \in V$ に対して積 $\alpha\mathbf{f} \in V$ が定義されていて次を満たす:

(iv) 任意の $\mathbf{f} \in V$ に対して $1\mathbf{f} = \mathbf{f}$.

(v) 任意の実数 α, β と $\mathbf{f} \in V$ に対して
 $(\alpha\beta)\mathbf{f} = \alpha(\beta\mathbf{f})$.

(vi) 任意の実数 α, β と $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in V$ に対して
 $\alpha(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \alpha\mathbf{f} + \alpha\mathbf{g}$, $(\alpha + \beta)\mathbf{f} = \alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{f}$.

大雑把に述べれば, $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in V$ と実数 α に対して

$$\mathbf{f} + \mathbf{g} \in V, \quad \alpha\mathbf{f} \in V$$

が成り立てば O.K.

ベクトル空間の元をベクトルと呼びます.

- ベクトル空間の例

- $\mathbb{R}$: 実数全体の集合.

- $\mathbb{R}^2$: 平面の点全体の集合.

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v), \quad \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

- $\mathbb{R}^3$: 空間の点全体の集合.

$$(x, y, z) + (u, v, w) = (x + u, y + v, z + w), \quad \alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z).$$

- X : ある性質をもった実数値関数全体の集合.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

集合 I で定義された連続な関数全体の集合など.

次にベクトルの長さについて考えよう.

定義 2. (ノルム)

ベクトル空間 X で定義された実数値関数 $\|\cdot\|$ が次の 3 条件を満たすときノルムという.

- (i) 任意の $u \in X$ に対して $\|u\| \geq 0$. $\|u\| = 0$ と $u = 0$ は同値.
- (ii) 任意の実数 α と $u \in X$ に対して
$$\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|.$$
- (iii) 任意の $u, v \in X$ に対して
$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

ノルムが定義されている場合、ベクトル u とベクトル v の距離は $\|u - v\|$ で与えられます。

- ノルムの例

- $\mathbb{R}$: 実数全体の集合

$$\|x\| = |x|, \quad \|x - y\| = |x - y|.$$

- $\mathbb{R}^2$: 平面の点全体の集合

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \|(x, y) - (u, v)\| = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}.$$

- X : 区間 $[0, 1]$ で定義された実数値連続関数で $v(0) = v(1) = 0$ を満たすものの全体の集合

$$\|v\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |v(x)|, \quad \|u - v\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x) - v(x)|.$$

定義 3. (バナッハ空間)

ベクトル空間 X にノルム $\|\cdot\|$ が定義されていて、ノルムによって定まる距離について完備であるとき、 $(X, \|\cdot\|)$ はバナッハ空間であるという。

- バナッハ空間の例

- $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$: 実数全体の集合, $\|x\| = |x|$.
- $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$: 平面の点全体の集合, $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- $(X, \|\cdot\|)$:

X は区間 $[0, 1]$ で定義された実数値連続関数で $v(0) = v(1) = 0$ を満たすものの全体の集合, $\|v\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |v(x)|$.

線形作用素

$D(A)$ をベクトル空間 X の部分集合とします.

$D(A)$ から X への写像 (関数) $A: D(A) \rightarrow X$ を作用素と呼びます.

定義 4. (線形作用素)

$D(A)$ がベクトル空間かつ, A が次の性質を満たすとき, A は線形作用素であるという.

$$A(u + v) = Au + Av \quad (u, v \in D(A)),$$

$$A(\alpha u) = \alpha Au \quad (\alpha \text{ は実数}, u \in D(A)).$$

線形作用素とは限らない作用素を非線形作用素と呼びます.

バナッハ空間 $(X, \|\cdot\|)$ の部分集合 $D(A)$ で定義された作用素 A と X の元 u_0 に対して抽象発展方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Au(t) & (t > 0) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (\text{ACP})$$

を考えます.

以下では主に A が線形作用素の場合を考えます.

(ACP) の解の存在と一意性を示すためにはどうする?

作用素の指数関数

先ず, a と u_0 を実数として, 次の微分方程式の初期値問題を考えます:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = au(t) & (t > 0) \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (\text{ODE})$$

(ODE) の解は**指数関数**を用いて $u(t) = e^{ta}u_0$ と表すことができます.

但し, $e = 2.718281828\cdots$ は自然対数の底です.

実際, 微分してみると

$$\frac{du}{dt}(t) = ae^{ta}u_0 = au(t), \quad u(0) = e^{0 \cdot a}u_0 = u_0$$

となり, 確かに (ODE) を満たしているので $u(t)$ は (ODE) の解です.

$$\frac{du}{dt}(t) = au(t) \quad (t > 0); \quad u(0) = u_0. \quad (\text{ODE})$$

$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t) \quad (t > 0); \quad u(0) = u_0. \quad (\text{ACP})$$

(ODE) と (ACP) を並べると見た目は同じ！

(ODE) の解は指数関数を用いて $u(t) = e^{ta}u_0$ と表せました.

それならば, (ACP) の解も指数関数を用いて

$$u(t) = e^{tA}u_0$$

と書けそうな気がする！

でも, 指数関数 e^{tA} をどのようにして定義すればよい？

- 指数関数 e^x について

自然対数の底 $e = 2.718281828\cdots$ は高校の数学で

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

として定義されています. 実数 x に対して指数関数 e^x は大学では

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \quad (*)$$

と定義されて,

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad (**)$$

が成り立つことも証明されます.

1948 年に吉田は、ある条件を満たす線形作用素 A に対して、
 A の近似 $A_\varepsilon = A(I - \varepsilon A)^{-1}$ (吉田近似) を考えて、(*) で形式的に
 $x = tA_\varepsilon$ とおいた

$$e^{tA_\varepsilon} u_0 = u_0 + tA_\varepsilon u_0 + \frac{(tA_\varepsilon)^2}{2!} + \cdots$$

を考えると、 $\varepsilon \rightarrow 0$ とした極限として e^{tA} を定義しました.

同じ 1948 年にヒレは吉田とは独立に

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad (**)$$

で形式的に $x = tA$ とした

$$e^{tA} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{tA}{n}\right)^{-n}$$

によって、 e^{tA} を定義しました.

この作用素の指数関数 e^{tA} のことを線形作用素の半群といいます。
線形作用素の半群が定義できるための必要十分条件は、
ヒレ、吉田、宮寺、フェラー、フィリップスによって得られており、
現在「ヒレ－吉田の定理」として知られています。

非線形作用素 A に対する指数関数 e^{tA} (非線形半群) の理論は、
1967 年に高村によって始められました。

非線形半群論に関する発展についてはサイエンスカフェの
バックナンバー第 37 シーズン第 170 話の田中直樹先生による
「微分方程式の適切性～ベクトル空間の枠を超える挑戦～」
をご覧ください。

年齢構造を持つ人口動態モデルの初期境界値問題を考えます.

$$\begin{cases} \partial_t u(t, a) + \partial_a u(t, a) + d(a)u(t, a) = 0 & (t > 0, a > 0) \\ u(t, 0) = \int_0^\infty \beta(a)u(t, a) da, & (t > 0) \\ u(0, a) = u_0(a) & (a \geq 0). \end{cases} \quad (\text{PD})$$

但し, $\partial_t u(t, a) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, a)$, $\partial_a u(t, a) = \frac{\partial u}{\partial a}(t, a)$.

$u(t, a)$: 時刻 t における年齢 a 才の人の人口密度.

$d(a)$: 年齢 a 才の人の死亡率.

$\beta(a)$: 年齢 a 才の人の出生率.

$u(0, a)$: 時刻 0 における年齢 a 才の人の人口密度.

(PD) をバナッハ空間における抽象発展方程式に書き換えてみます.

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix} : v \in L^1(0, \infty), y \in \mathbb{R} \right\},$$

$$L^1(0, \infty) = \left\{ v : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ で } \int_0^\infty |v(x)| dx \text{ が有限な値} \right\}.$$

$$\left\| \begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix} \right\| = \int_0^\infty |v(x)| dx + |y|$$

とおくと, $(X, \|\cdot\|)$ はバナッハ空間になります.

(PD) を

$$\begin{cases} \partial_t u(t, a) = -\partial_a u(t, a) - d(a)u(t, a) \\ 0 = -u(t, 0) + \int_0^\infty \beta(a)u(t, a) da, \\ u(0, a) = u_0(a) \quad (a > 0). \end{cases}$$

と変形して, $\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$A\mathbf{u}(t) = A \begin{pmatrix} u(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_a u(t, a) - d(a)u(t, a) \\ -u(t, 0) + \int_0^\infty \beta(a)u(t, a) da \end{pmatrix}$$

とおくことにより

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt}(t) = A\mathbf{u}(t) & (t > 0) \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. \end{cases}$$

となり、 X における抽象発展方程式の初期値問題に書き変わります。

ヒレ-吉田の定理を用いて解は $\mathbf{u}(t) = e^{tA}\mathbf{u}_0$.

としたいところですが、残念なことに作用素 A はヒレ-吉田の定理の条件の1つを満たさないのでヒレ-吉田の定理を利用できない！

別の方法で (PD) の解の存在を証明できるので困りませんが、最初に述べた抽象発展方程式を考える理由の一つである

「出来るだけ多くの微分方程式の解の存在・一意性をまとめて扱うことができる理論を構築したい」

からすると、これでは満足出来ません。

1987 年にアレントは線形作用素の半群を一般化した積分半群を導入し、ヒレ－吉田の定理の拡張を得ました。

ヒレ－吉田の定理の 1 つの条件だけを満たさない A に対する積分半群 (ここでは LLC 積分半群と呼ぶ) は線形作用素の半群の自然な拡張であり、人口動態モデル (PD) などに応用可能な理論として、抽象発展方程式の理論の適用範囲を拡大しました。

LLC 積分半群を用いて私が以前扱った人口動態モデルを紹介します。

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, a) + \partial_a u(t, a) + d_1(t, a)u(t, a) + \int_0^\infty p(t, a, b, 0) db &= f_1(t, a), \\ \partial_t v(t, b) + \partial_b v(t, b) + d_2(t, b)v(t, b) + \int_0^\infty p(t, a, b, 0) da &= f_2(t, a), \\ \partial_t p(t, a, b, c) + \partial_a p(t, a, b, c) + \partial_b p(t, a, b, c) + \partial_c p(t, a, b, c) \\ + (d_1(t, a) + d_2(t, b) + \sigma(t, a, b, c))p(t, a, b, c) &= 0. \\ (t > 0, a > 0, b > 0, c > 0).\end{aligned}$$

$u(t, a)$: 時刻 t における a 才独身男性の密度.

$v(t, b)$: 時刻 t における b 才独身女性の密度.

$p(t, a, b, c)$: 時刻 t における男性 a 才, 女性 b 才,
ペア年数 c 年のペアの密度.

人口動態モデル

$d_1(t, a)$: 時刻 t における a 才男性の死亡率.

$d_2(t, b)$: 時刻 t における b 才女性の死亡率.

$\sigma(t, a, b, c)$: 時刻 t における男性 a 才, 女性 b 才, ペア年数 c 年の
ペアの解消率.

$\int_0^\infty p(t, a, b, 0) db$: 時刻 t における a 才独身男性が結婚する数.

$\int_0^\infty p(t, a, b, 0) da$: 時刻 t における b 才独身女性が結婚する数.

$$f_1(t, a) = \int_0^\infty \int_0^\infty (d_2(t, b) + \sigma(t, a, b, c)) p(t, a, b, c) db dc$$

: ペアでなくなることにより新たに生じる a 才独身男性の数.

$$f_2(t, b) = \int_0^\infty \int_0^\infty (d_1(t, a) + \sigma(t, a, b, c)) p(t, a, b, c) da dc$$

: ペアでなくなることにより新たに生じる b 才独身女性の数.

$$u(t,0) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \beta_1(t,a,b,c) p(t,a,b,c) da db dc,$$

$$v(t,0) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \beta_2(t,a,b,c) p(t,a,b,c) da db dc,$$

$$p(t,a,b,0) = \Psi(t,a,b), \quad p(t,0,b,c) = p(t,a,0,c) = 0.$$

$\beta_1(t,a,b,c)$: 時刻 t における男性 a 才, 女性 b 才, ペア年数 c 年のペアに男子が生まれる割合.

$\beta_2(t,a,b,c)$: 時刻 t における男性 a 才, 女性 b 才, ペア年数 c 年のペアに女子が生まれる割合.

$\Psi(t,a,b)$: 時刻 t における a 才の独身男性と b 才の独身女性からなる新ペアを与える関数.

死亡率 d_1, d_2 , ペア解消率 σ , 新生児誕生率 β_1, β_2 および結婚関数 Ψ が時刻 t における総人口数

$$\int_0^\infty u(t, a) da + \int_0^\infty v(t, b) db + 2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty p(t, a, b, c) da db dc$$

に関係する場合を考えて、解の存在・一意性を示しました。

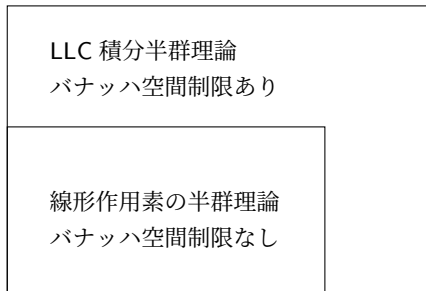
LLC 積分半群理論により、(PD) のような人口動態の初期境界値問題にも抽象発展方程式の理論が適用出来るようになりました。

しかし、まだ問題点が残っていました。

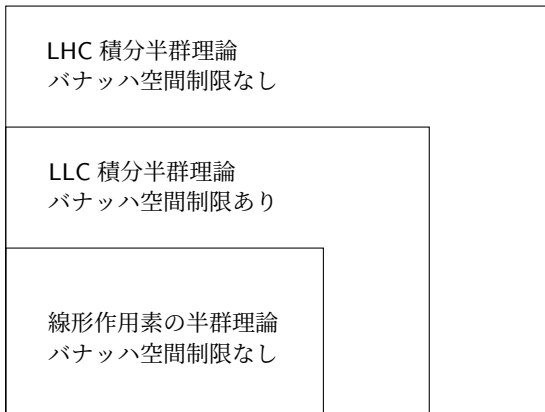
線形作用素の半群理論は、バナッハ空間の種類に依らずに適用可能であるという特長がありました。ところが、LLC 積分半群理論の場合線形作用素の半群理論の拡張となるには、バナッハ空間の種類に制限が必要でした。

ヒレ－吉田の定理：条件 A, 条件 B, 条件 C

LLC 積分半群理論：条件 A, 条件 B



マーガルールーアン (2007), ティーメ (2008) は LLC 積分半群を含む積分半群 (ここでは LHC 積分半群と呼ぶ) のクラスを導入することで, この問題点を克服しました.



私の研究について

線形発展方程式の初期値問題

$$(ACP) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Au(t) & (t > 0) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

に対する LLC 積分半群の理論は田中 (1999) により A が時間に依存する

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = A(t)u(t) & (0 < t < T) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

の場合に, M-田中 (2007,2017) などによって準線形問題

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = A(u(t))u(t) & (0 < t < T) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

にも適用できるように拡張されました.

私の研究について

線形発展方程式の初期値問題

$$(ACP) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Au(t) & (t > 0) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

に対する LHC 積分半群の理論を A が時間 t に依存する場合

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = A(t)u(t) & (0 < t < T) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

や準線形問題

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = A(u(t))u(t) & (0 < t < T) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

に適用できるよう拡張することを目指しています.

ご清聴ありがとうございました.