静岡大学大学院総合科学技術研究科

修士課程・理学専攻・数学コース

２０２５年度入学試験問題

２次募集

専　門（数　学）

注意事項：

$\boxed{\mathrm{E}}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ のすべてに解答せよ.
なお解答用紙は問題ごとに別にし, 各用紙に問題番号を明記せよ.
紙面が不足した場合は解答用紙の裏面を使用してもよい.

$\boxed{\mathsf{E}}$ 次の命題の証明を英語で書け．ただし，論理記号（$\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$ など）を使わないこと．

(1) 全ての正の整数 n に対して $7^n - 2n - 1$ は 4 の倍数である．

(2) $(X; d)$ を距離空間とし，X の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は X の点 y に収束するとき，y は X の部分集合 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ の触点である．

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ.

(1) $\{a_n\}$ を数列とし, 関数 f を $f(0)=0$ であり, 各自然数 n に対して,

$$f(x) = a_n \quad \left(\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}\right)$$

を満たす有界閉区間 $[0,1]$ 上の関数とする. このとき, 関数 f が $x=0$ で右微分可能であるならば, 数列 $\{na_n\}$ は収束することを示せ.

(2) 有界閉区間 $[0,1]$ 上の関数 f を次により定める.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ が無理数または } 0 \text{ のとき}) \\[2ex] \dfrac{1}{m} & \left(\begin{array}{l} x = \dfrac{n}{m} \text{ のとき, ただし,} \\ \dfrac{n}{m} \text{ は既約分数であり, } m \text{ は自然数である} \end{array}\right) \end{cases}$$

このとき, 関数 f は有界閉区間 $[0,1]$ 上でリーマン積分可能であり, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ であることを示せ.

(3) U を $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ の開集合とし, $(x_0, y_0) \in U$ とする. $f : U \to \mathbb{R}^n$ は C^1 級写像であり, 点 (x_0, y_0) における f の x に関する偏微分 $D_x f(x_0, y_0)$ は同型写像であるとする. 写像 $F : U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ を

$$F(x,y) = (f(x,y),\ y) \quad ((x,y) \in U)$$

により定義する. このとき, 写像 F の 点 (x_0, y_0) における微分 $DF(x_0, y_0)$ の表現行列を求めよ. さらに, 微分 $DF(x_0, y_0)$ が同型写像であることを示せ.

(4) 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x-y}{1+x+y}\,dxdy$ の値を求めよ. ただし,

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x+y \leq 1,\ \ 0 \leq x-y \leq 1\}$$

である.

$\boxed{2}$ V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間, V^* を V から $\mathbb{R}$ への線形写像全体の集合とする. また部分空間 $W \subset V$ に対して,

$$W^{\perp} := \{f \in V^* \mid f(\boldsymbol{v}) = 0 \ \forall \boldsymbol{v} \in W\},$$

部分集合 $S \subset V^*$ に対して,

$$S^{\perp} := \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = 0 \ \forall f \in S\}$$

と定義するとき, 次の各問に答えよ.

(1) $S \subset V^*$ を部分集合とするとき, $S^{\perp} \subset V$ は部分空間であることを示せ.

(2) $W_1, W_2 \subset V$ を部分空間とするとき,

$$W_1 + W_2 := \{\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \mid \boldsymbol{v}_i \in W_i\} \subset V$$

も部分空間であることを示せ.

(3) $W_1, W_2 \subset V$ を部分空間とするとき, $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$ であることを示せ.

(4) V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を一つ固定する. $j = 1, \ldots, n$ に対して写像 $f_j : V \to \mathbb{R}$ を $f_j(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i) = \alpha_j$ と定義するとき, $f_j \in V^*$ であることを示せ.

(5) 部分空間 $W \subset V$ に対して, $W = (W^{\perp})^{\perp}$ であることを示せ.

$\boxed{3}$ 位相空間 X の部分集合 A について, X の 2 つの開集合 U, V で

$$A \subseteq U \cup V, \quad U \cap V \cap A = \emptyset, \quad U \cap A \neq \emptyset, \quad V \cap A \neq \emptyset$$

となるものが存在しないとき, A は連結であるという.

X と Y は位相空間で, X および Y では 1 点集合は閉集合になるとする. $f : X \to Y$ を連続写像とする. 次の各問に答えよ.

(1) X の連結な部分集合 A について, $f(A)$ は連結になることを示せ.

(2) $f : X \to Y$ は全単射で, Y は連結, かつ, X は連結でない例を与えよ.

(3) X の空でない連結な部分集合 A と点 $x \in X$ について,

$$x \in \mathrm{Cl}(A) \iff A \cup \{x\} \text{ は連結}$$

を示せ. ただし $\mathrm{Cl}(A)$ は A の閉包とする.

(4) $f : X \to Y$ は全単射で, X の任意の部分集合 A について

$$A \text{ は連結} \iff f(A) \text{ は連結}$$

が成り立ち, かつ, f が同相写像にならない例を与えよ.

(5) $f : X \to Y$ は全単射であり, X の任意の部分集合 A について

$$A \text{ は連結} \iff f(A) \text{ は連結}$$

が成り立ち, X のすべての開集合は

$$\mathcal{U} = \{\, U \mid U \text{ は } X \text{ の開集合で } X - U \text{ は連結} \,\}$$

に属する集合の和集合で表せるとする. このとき f は同相写像になることを示せ.