第180回 サイエンスカフェ
「非可換2次曲線っていったい何なんだ?」

毛利 出
作成: 毛利研究室

静岡大学

2025年2月13日

目次

第1部：2次曲線の分類

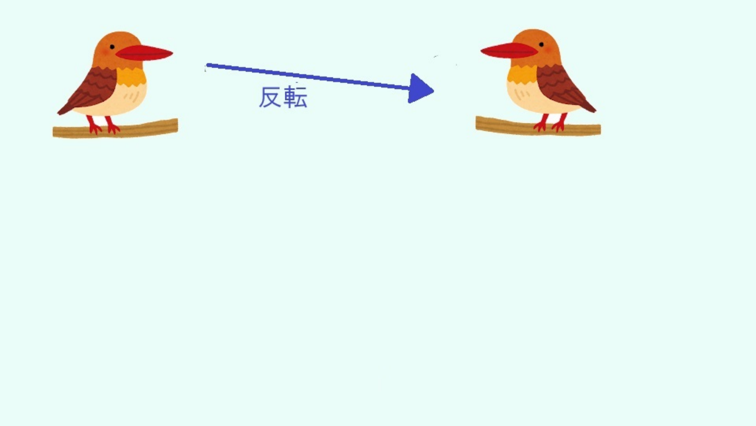
何種類？

問題

上図には何種類の鳥さんがいるでしょう？

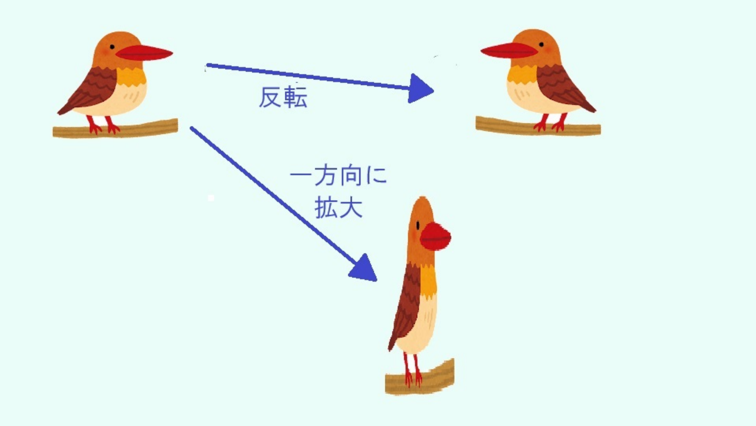
何種類？

同じ種類の鳥は，反転・



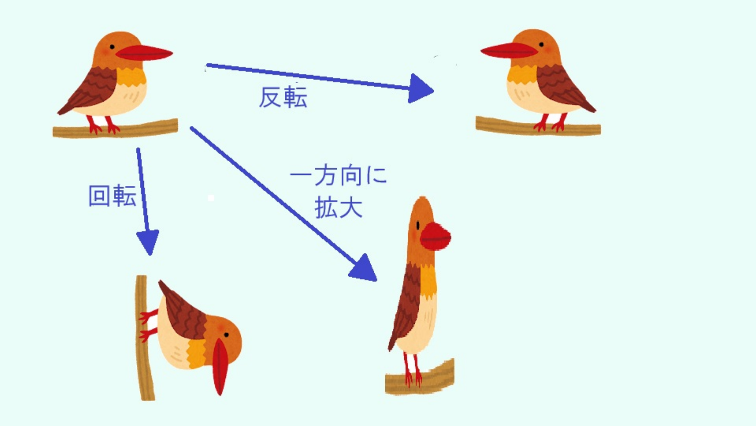
何種類？

同じ種類の鳥は, 反転・一方向への拡大・



何種類？

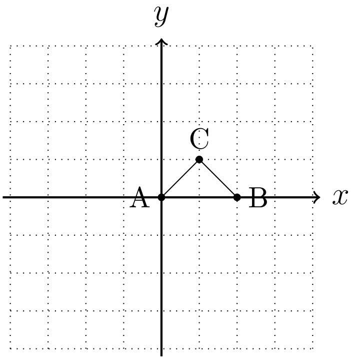
同じ種類の鳥は, 反転・一方向への拡大・回転の組み合わせ.



変換を学ぼう！

演習問題

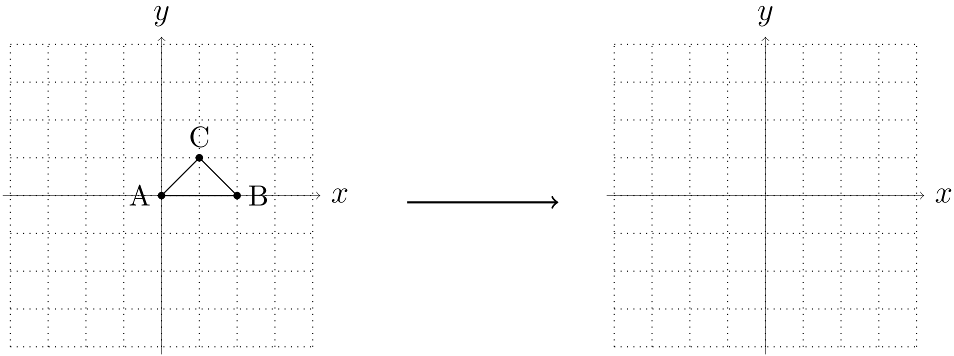
座標平面上に点 A$(0,0)$, 点 B$(2,0)$, 点 C$(1,1)$ からなる三角形 ABC があります．このとき, 次の問に答えてください.



平行移動

問題 1

三角形 ABC を変換 $(a, b) \to (a+1, b+2)$ によって変換した三角形 $A_1B_1C_1$ を右下図に描いてください.

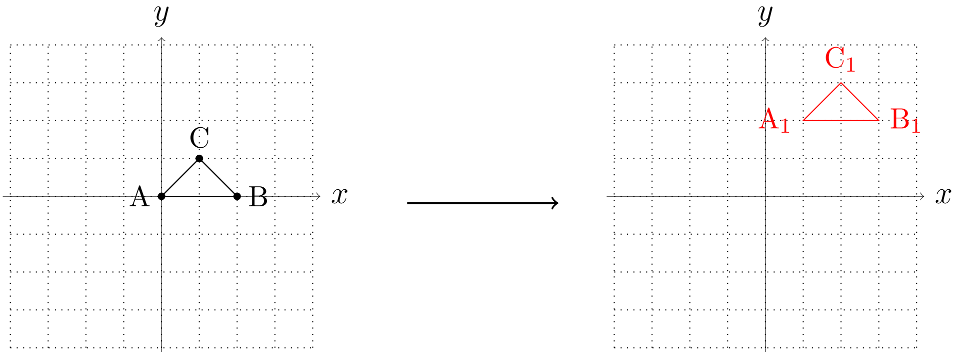


解答

点 A$(0,0)$, 点 B$(2,0)$, 点 C$(1,1)$ は変換 $(a,b) \to (a+1, b+2)$ によって,

$$
\begin{aligned}
(0,0) &\to (0+1, 0+2) = (1,2)\\
(2,0) &\to (2+1, 0+2) = (3,2)\\
(1,1) &\to (1+1, 1+2) = (2,3)
\end{aligned}
$$

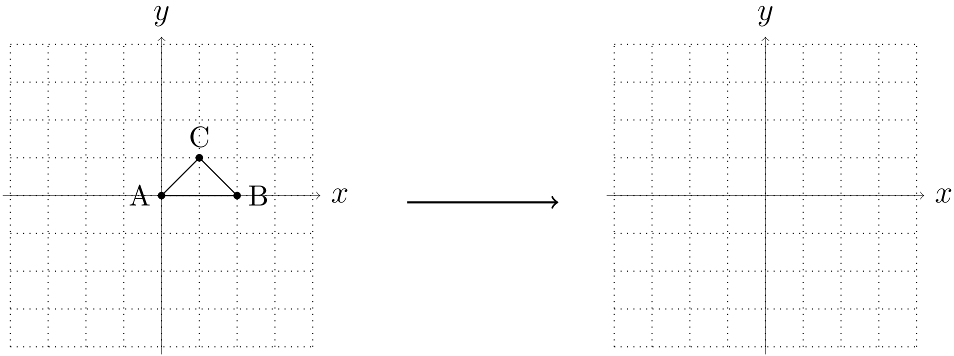
と移るので, 以下のようになる.



拡大

問題 2

三角形 ABC を変換 $(a, b) \to (2a, 3b)$ によって変換した三角形 $\mathrm{A_2B_2C_2}$ を右下図に描いてください.

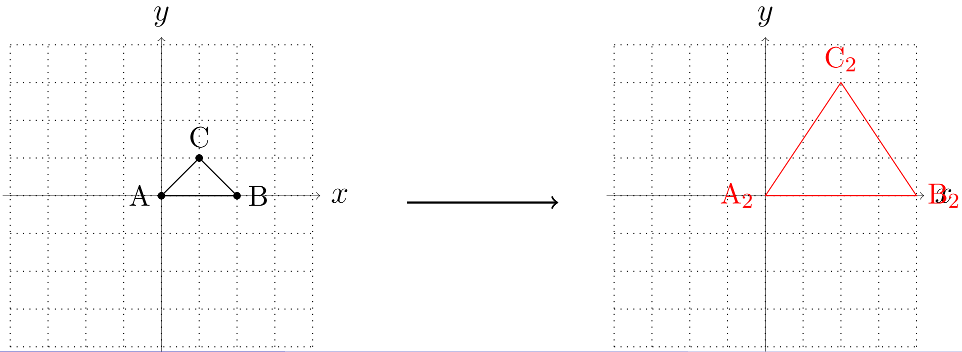


解答

点 A$(0,0)$, 点 B$(2,0)$, 点 C$(1,1)$ は変換 $(a,b)\to(2a,3b)$ によって,

$$\begin{aligned}(0,0)&\to(2\times0,3\times0)=(0,0)\\(2,0)&\to(2\times2,3\times0)=(4,0)\\(1,1)&\to(2\times1,3\times1)=(2,3)\end{aligned}$$

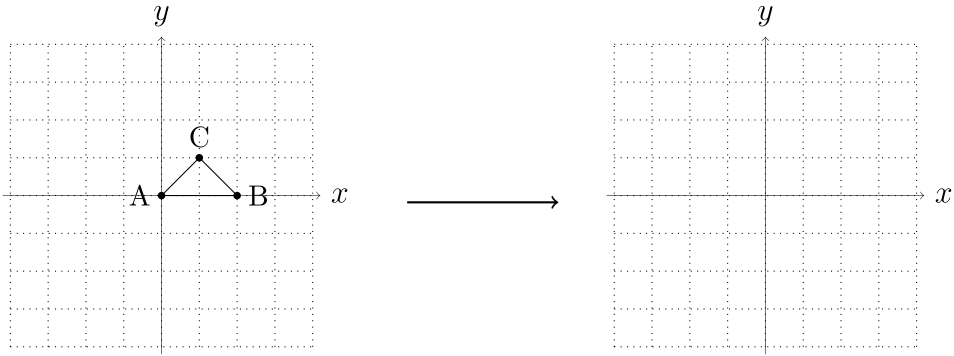
と移るので, 以下のようになる.



反射

問題 3

三角形 ABC を変換 $(a, b) \to (a, -b)$ によって変換した三角形 $\mathrm{A_3B_3C_3}$ を右下図に描いてください.

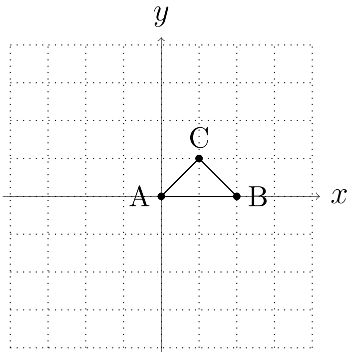


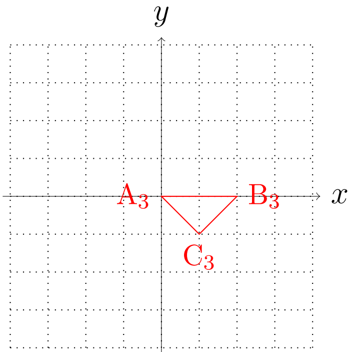
解答

点 $\mathrm{A}(0,0)$, 点 $\mathrm{B}(2,0)$, 点 $\mathrm{C}(1,1)$ は変換 $(a,b)\to(a,-b)$ によって,

$$\begin{aligned}(0,0)&\to(0,-0)=(0,0)\\(2,0)&\to(2,-0)=(2,0)\\(1,1)&\to(1,-1)=(1,-1)\end{aligned}$$

と移るので, 以下のようになる.

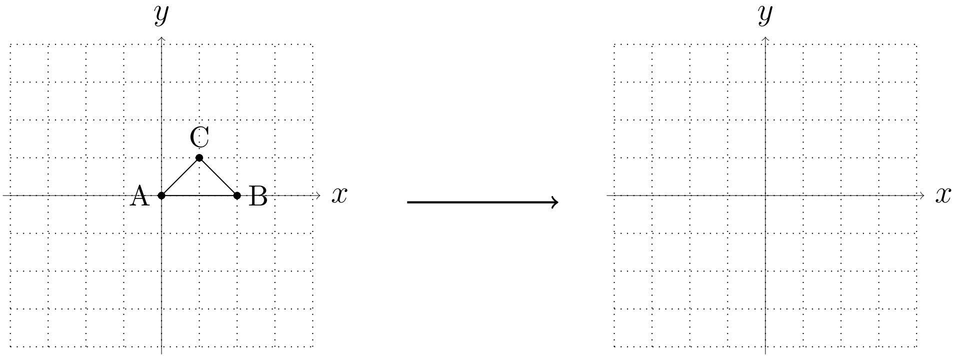




回転

問題 4

三角形 ABC を変換 $(a, b) \to (-b, a)$ によって変換した三角形 $\mathrm{A}_4\mathrm{B}_4\mathrm{C}_4$ を右下図に描いてください.

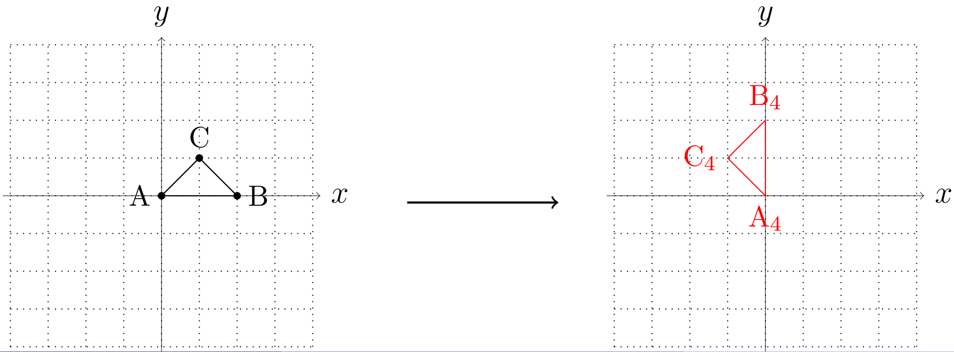


解答

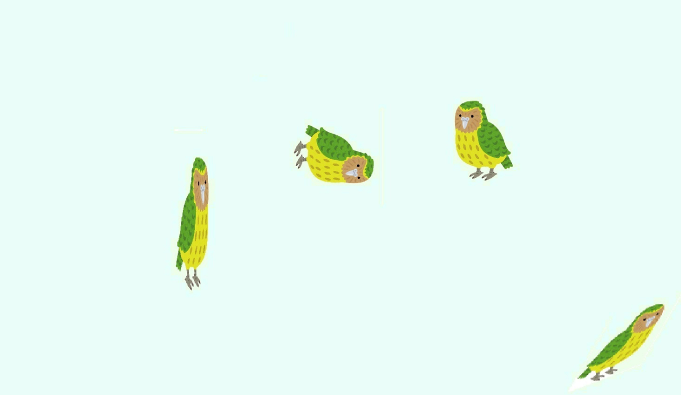
点 A$(0,0)$, 点 B$(2,0)$, 点 C$(1,1)$ は変換 $(a,b) \to (-b,a)$ によって,

$$
\begin{aligned}
(0,0) &\to (-0,0) = (0,0) \\
(2,0) &\to (-0,2) = (0,2) \\
(1,1) &\to (-1,1) = (-1,1)
\end{aligned}
$$

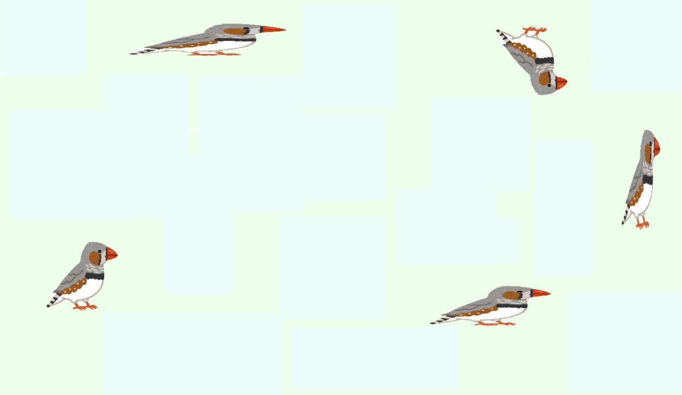
と移るので, 以下のようになる.



鳥の種類の答え

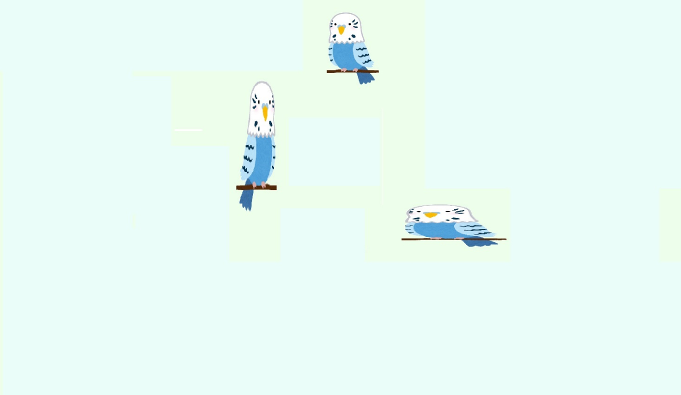


鳥の種類の答え

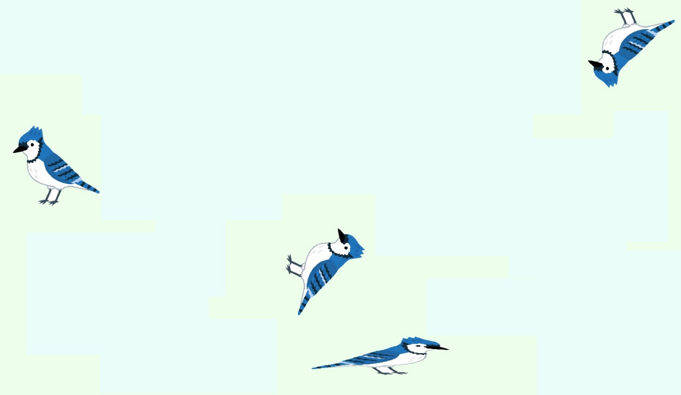


鳥の種類の答え

鳥の種類の答え

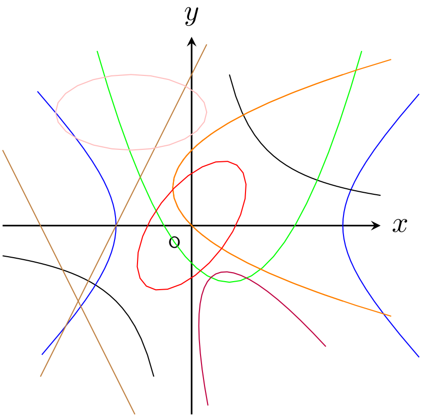


鳥の種類の答え



合計 5 種類

2次曲線は何種類？



分類

上の2次曲線は何種類か？

2次曲線の定義

2次曲線

多項式 $f(x,y) = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_6$ に対して,

$$f(x,y) = 0$$

となる xy 平面での解の集合を2**次曲線**という.

各 a_i $(i = 1, \cdots, 6)$ が

実数のとき, 実2次曲線

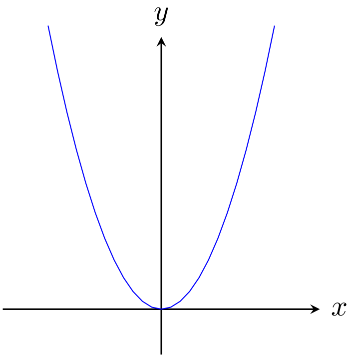
複素数のとき, 複素2次曲線

という.

2次曲線の例

$$x^2 - y = 0$$

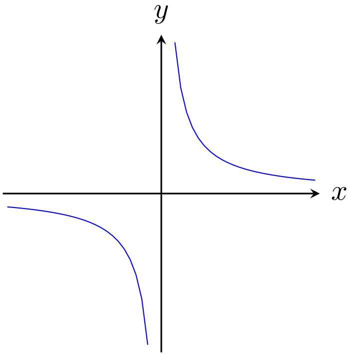
$x^2 - y = 0$ を変形して, $y = x^2$ より, これは放物線であり, 以下の図になる.



2次曲線の例

$$xy - 1 = 0$$

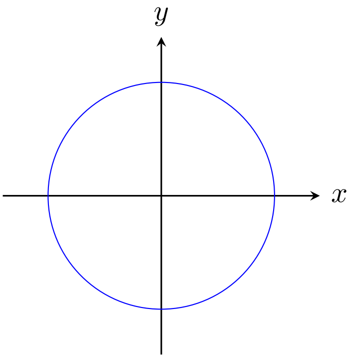
$xy - 1 = 0$ を変形して, $y = \dfrac{1}{x}$ より, これは双曲線であり, 以下の図になる.



2 次曲線の例

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$x^2 + y^2 - 1 = 0$ を変形して, $x^2 + y^2 = 1$ より, これは円であり, 以下の図になる.

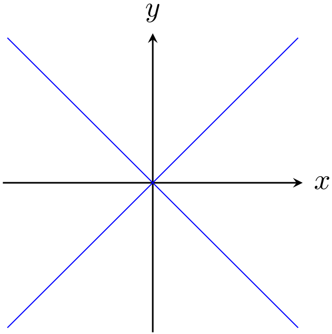


2次曲線の例

$$x^2 - y^2 = 0$$

$x^2 - y^2 = 0$ を変形して, $(x-y)(x+y) = 0$ より, $x - y = 0$ または, $x + y = 0$ である.

したがって, $y = x$ または, $y = -x$ であるから, 交わる二直線である.



幾何的アフィン変換

平行移動, 拡大・縮小, 回転は以下のような変換によって考えることができる.

幾何的アフィン変換

xy 平面上において,

$$(p, q) \longmapsto (ap + bq + c, a'p + b'q + c')$$

によって定まる変換を**幾何的アフィン変換**という.

すなわち, 幾何的アフィン変換とは, 点 (p, q) について,

$$p \longmapsto ap + bq + c$$

$$q \longmapsto a'p + b'q + c'$$

と移動することによって定まる変換である.

代数的アフィン変換

多項式に対しても, アフィン変換を定義する.

代数的アフィン変換の定義

多項式について

$$f(x,y) \mapsto f(ax+by+c, a'x+b'y+c')$$

で定まる変換を**代数的アフィン変換**という.

すなわち, 代数的アフィン変換とは, 変数 x, y について,

$$x \longmapsto \ ax+by+c$$

$$y \longmapsto a'x+b'y+c'$$

と代入することによって定まる変換である.

幾何的アフィン変換の例 1

$$\text{円}\quad x^2 + y^2 = 1$$

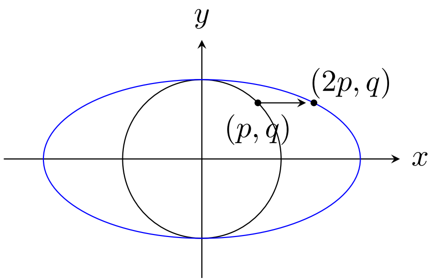
上の点 (p, q) を, 幾何的アフィン変換

$$p \longmapsto 2p, \quad q \longmapsto q$$

によって移すと,

$$\text{楕円}\quad \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

上の点になる.



円を縦横に違う倍率で拡大すると, 楕円に!!

代数的アフィン変換の例1

多項式 $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 - 1$ について, 代数的アフィン変換を,

$$x \longmapsto 2x, \quad y \longmapsto y$$

によって定まる変換とすると,

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 - 1 \to \left(\frac{{\color{red}2x}}{2}\right)^2 + {\color{red}y}^2 - 1 \\ = x^2 + y^2 - 1\end{aligned}$$

より, $g(x, y) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 - 1$ はこの変換によって, $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ に移る.

幾何的アフィン変換と代数的アフィン変換の関係 1

円 $x^2 + y^2 - 1 = 0$

上の点を, 幾何的アフィン変換

$$p \longmapsto 2p, \quad q \longmapsto q$$

によって移すと,

楕円 $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 - 1 = 0$

になる.

対応

$$\longleftrightarrow$$

$g(x, y) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 - 1$

を, 代数的アフィン変換

$$x \longmapsto 2x, \quad y \longmapsto y$$

によって移すと,

$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

になる.

幾何的アフィン変換と代数的アフィン変換の間には関係がある.

幾何的アフィン変換の例 2

$$\text{双曲線}\quad xy = 1$$

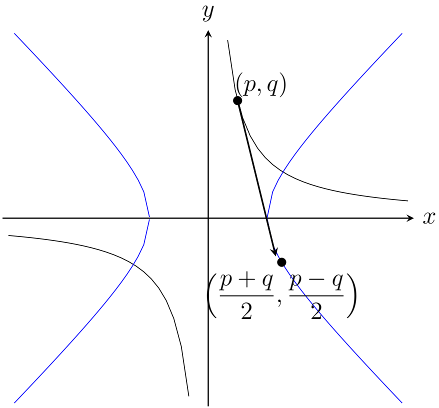
上の点 (p, q) を, 幾何的アフィン変換

$$p \longmapsto \frac{p+q}{2}, \qquad q \longmapsto \frac{p-q}{2}$$

によって移すと,

$$\text{双曲線}\quad x^2 - y^2 = 1$$

上の点になる.



代数的アフィン変換の例2

多項式 $x^2 - y^2 - 1$ について, 代数的アフィン変換を,

$$x \longmapsto \frac{x+y}{2}, \quad y \longmapsto \frac{x-y}{2}$$

によって定まる変換とすると,

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - 1 \to \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 - 1 \\ = xy - 1 \end{aligned}$$

より, $g(x, y) = x^2 - y^2 - 1$ はこの変換によって, $f(x, y) = xy - 1$ に移る.

幾何的アフィン変換と代数的アフィン変換の関係2

双曲線 $xy - 1 = 0$

上の点を, 幾何的アフィン変換

$$p \longmapsto \frac{p+q}{2}, \quad q \longmapsto \frac{p-q}{2}$$

によって移すと,

双曲線 $x^2 - y^2 - 1 = 0$

になる.

$$\xleftrightarrow{\text{対応}}$$

$g(x, y) = x^2 - y^2 - 1$

を, 代数的アフィン変換

$$x \longmapsto \frac{x+y}{2}, \quad y \longmapsto \frac{x-y}{2}$$

によって移すと,

$f(x, y) = xy - 1$

になる.

幾何的アフィン変換と代数的アフィン変換の間には関係がある.

2次多項式の分類

2次曲線 $f(x,y)=0$ を幾何的アフィン変換で分類するには

2次多項式 $f(x,y)$ を代数的アフィン変換によって分類すればよい！

例

$f(x,y)=x^2+2xy+2y^2-1=0$ はどんな図形に分類されるか？

多項式に注目すると,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2+2xy+2y^2-1 \\ &= (x+y)^2+y^2-1 \quad &&(\text{平方完成}) \\ &\to x^2+y^2-1 &&(x\mapsto x-y,\, y\mapsto y\text{ を満たす代数的アフィン変換}) \end{aligned}$$

よって, $f(x,y)=x^2+2xy+2y^2-1=0$ は円に分類される.

多項式の分類

実 2 次多項式の分類

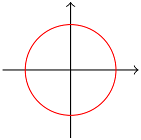
実 2 次多項式は以下のいずれか 8 つに 代数的アフィン変換で移る.

$$x^2 + y^2 - 1 \qquad xy - 1 \qquad x^2 - y \qquad x^2 - y^2$$

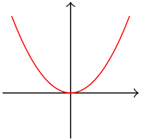
$$x^2 + y^2 \qquad x^2 - 1 \qquad x^2 + 1 \qquad x^2$$

実２次曲線の分類結果

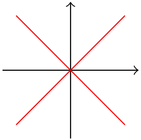
実２次曲線の分類結果を図示すると以下のようになる.



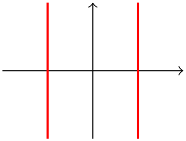
$x^2 + y^2 - 1 = 0$



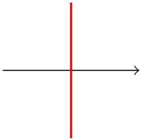
$x^2 - y = 0$



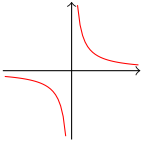
$x^2 - y^2 = 0$



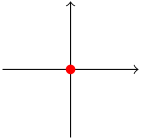
$x^2 - 1 = 0$



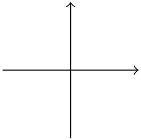
$x^2 = 0$



$xy - 1 = 0$



$x^2 + y^2 = 0$



$x^2 + 1 = 0$

複素アフィン変換

複素数に対しても, 同様にアフィン変換を考える.

複素幾何的アフィン変換

複素数の組 (p, q) に対して,

$$(p, q) \longmapsto (ap + bq + c, a'p + b'q + c')$$

によって定まる変換を**複素幾何的アフィン変換**という.

複素代数的アフィン変換の定義

複素数を係数に持つ多項式 $f(x, y)$ に対して

$$f(x, y) \longmapsto f(ax + by + c, a'x + b'y + c')$$

で定まる変換を**複素代数的アフィン変換**という.

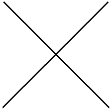
実数から複素数へ

実数から複素数に拡張するとどうなるのか？

例えば, $x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy)$ と因数分解できる.

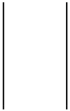
$$x^2 + y^2 = 0 \longrightarrow (x+iy)(x-iy) = 0$$

$$\cdot \longrightarrow$$



$$x^2 + 1 = 0 \longrightarrow (x+i)(x-i) = 0$$

$$\emptyset \longrightarrow$$



曲線でないものが曲線になる!!

多項式の分類

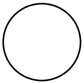
複素 2 次多項式の分類

複素 2 次多項式は以下のいずれか 5 つに代数的アフィン変換で移る.

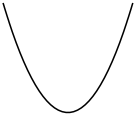
$$x^2 + y^2 - 1 \qquad x^2 - y \qquad x^2 - y^2 \qquad x^2 - 1 \qquad x^2$$

実数から複素数へ

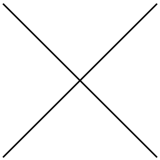
実数での 2 次曲線の分類は



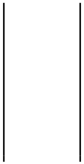
$x^2 + y^2 - 1 = 0$



$x^2 - y = 0$

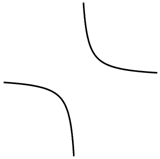


$x^2 - y^2 = 0$



$x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 0$



$xy - 1 = 0$

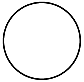
$x^2 + y^2 = 0$

$\emptyset$

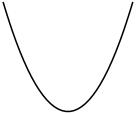
$x^2 + 1 = 0$

実数から複素数へ

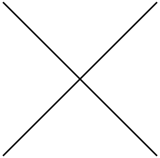
複素数での 2 次曲線の分類は



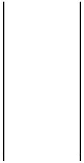
$x^2 + y^2 - 1 = 0$



$x^2 - y = 0$

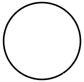


$x^2 - y^2 = 0$

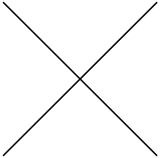


$x^2 - 1 = 0$

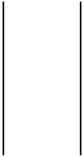
$x^2 = 0$



$xy - 1 = 0$



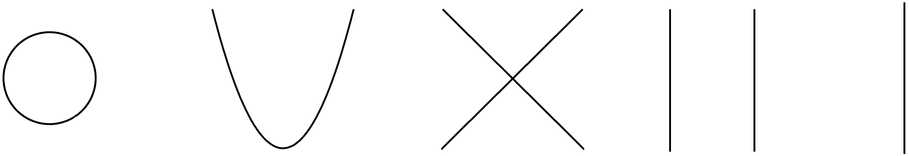
$x^2 + y^2 = 0$



$x^2 + 1 = 0$

複素2次曲線の分類結果

複素2次曲線の分類結果のイメージ図



$x^2 + y^2 - 1 = 0$ $\quad$ $x^2 - y = 0$ $\quad$ $x^2 - y^2 = 0$ $\quad$ $x^2 - 1 = 0$ $\quad$ $x^2 = 0$

休憩

第2部：非可換2次曲線の分類

実射影平面

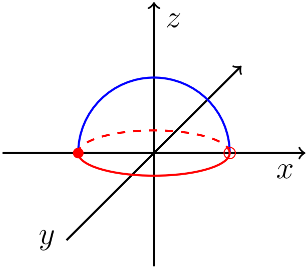
定義（実射影平面）

$\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ に対して，同値関係を考える．
$(a_1, a_2, a_3) \sim (b_1, b_2, b_3)$ であるとは，次の条件を満たすときであると定める．

（条件）ある 0 でない実数 k に対して，$a_1 = kb_1, a_2 = kb_2, a_3 = kb_3$ が成り立つ．

この同値関係による $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ の同値類を，**実射影平面**という．

xyz 空間内における長さ 1 のベクトルの集まりで, 向きが逆なものを同一視することによって, 射影平面が得られる.



非ユークリッド幾何

射影平面

定義（複素射影平面）

$\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ に対して，同値関係を考える．
$(a_1, a_2, a_3) \sim (b_1, b_2, b_3)$ であるとは，次の条件を満たすときであると定める．

（条件）ある 0 でない複素数 k に対して，$a_1 = kb_1, a_2 = kb_2, a_3 = kb_3$ が成り立つ．

この同値関係による $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ の同値類を，**複素射影平面** $\mathbb{P}^2$ という．

複素射影2次曲線

複素射影2次曲線

斉次式 $f(x,y,z) = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4xz + a_5yz + a_6z^2$ に対して,

$$f(x,y,z) = 0$$

の射影平面内での解の集合を**複素射影2次曲線**という.

斉次化

今まで考えていた多項式を, 斉次式にするために, 以下を考える.

斉次化

多項式に対して**斉次化**, **非斉次化**を以下のように定める.

$$a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_6$$

斉次化↓　↑非斉次化

$$a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4xz + a_5yz + a_6z^2$$

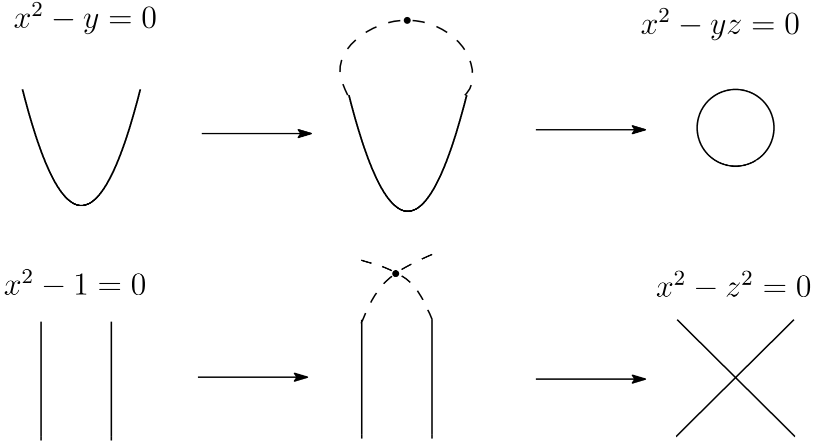
斉次化の例

複素 2 次曲線を定めていた多項式を斉次化してみる.

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 - 1 &\longrightarrow x^2 + y^2 - z^2 \\
x^2 - y &\longrightarrow x^2 - yz \\
x^2 - y^2 &\longrightarrow x^2 - y^2 \\
x^2 - 1 &\longrightarrow x^2 - z^2 \\
x^2 &\longrightarrow x^2
\end{aligned}
$$

斉次化すると

斉次化を考えるとどうなるのか?



射影変換

ここで, 斉次式に対しても, アフィン変換のようなものを定義する.

射影変換の定義

複素数を係数に持つ斉次多項式 $f(x,y,z)$ に対して

$$f(x,y,z) \mapsto f(ax+by+cz, a'x+b'y+c'z, a''x+b''y+c''z)$$

で定まる変換を**射影変換**という.

すなわち, 射影変換とは, x,y,z について,

$$\begin{aligned} x &\longmapsto ax+by+cz \\ y &\longmapsto a'x+b'y+c'z \\ z &\longmapsto a''x+b''y+c''z \end{aligned}$$

と代入することによって定まる変換である.

射影変換の例1

(1) 斉次式, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ に対して,

$$x \mapsto x, \quad y \mapsto y, \quad z \mapsto iz,$$

によって定まる射影変換を考えると,

$$x^2 + y^2 - z^2 \to (x)^2 + (y)^2 - (iz)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

(2) 斉次式, $f(x,y,z) = x^2 - yz$ に対して,

$$x \mapsto x, \quad y \mapsto iy + z, \quad z \mapsto iy - z,$$

によって定まる射影変換を考えると,

$$x^2 - yz \to (x)^2 - (iy + z)(iy - z) = x^2 + y^2 + z^2$$

射影変換の例 2

(1) 斉次式, $f(x,y,z) = x^2 - y^2$ に対して,

$$x \mapsto x, \quad y \mapsto iy, \quad z \mapsto z,$$

によって定まる射影変換を考えると,

$$x^2 - y^2 \to ({\color{red}x})^2 - ({\color{red}iy})^2 = x^2 + y^2$$

(2) 斉次式, $f(x,y,z) = x^2 - z^2$ に対して,

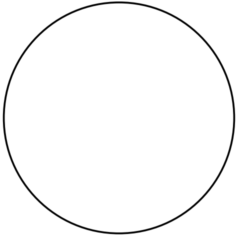
$$x \mapsto x, \quad y \mapsto z, \quad z \mapsto iy,$$

によって定まる射影変換を考えると,

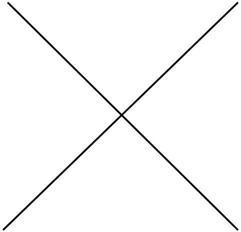
$$x^2 - z^2 \to ({\color{red}x})^2 - ({\color{red}iy})^2 = x^2 + y^2$$

射影2次曲線の分類結果

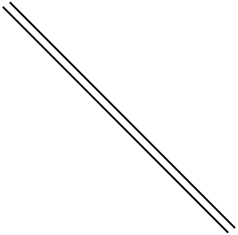
射影2次曲線のイメージ図



$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$



$$x^2 + y^2 = 0$$



$$x^2 = 0$$

射影 2 次曲線束

$f(x,y,z)=0$ の解について考えてきたが, 次は連立方程式の解について考えてみる.

射影 2 次曲線束

$f(x,y,z), g(x,y,z)$ を 2 次斉次多項式とする. このとき, 連立方程式

$$\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$$

の射影平面内での解の集合を, **射影 2 次曲線束**という.

射影 2 次曲線束の分類

射影 2 次曲線束の分類 (大巻次郎 2023 年修士論文)

射影 2 次曲線束は, 次の 6 つの連立方程式のいずれかになる.

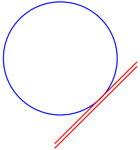
$$(1)\ \begin{cases} y^2 = 0 \\ x^2 + yz = 0 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} xz = 0 \\ x^2 + yz = 0 \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} x^2 = 0 \\ y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$$

$$(4)\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ y^2 + yz = 0 \end{cases} \qquad (5)\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ x^2 + z^2 = 0 \end{cases} \qquad (6)\ \begin{cases} x^2 = 0 \\ y^2 = 0 \end{cases}$$

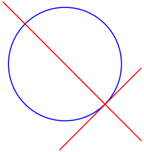
射影２次曲線束の分類結果

射影２次曲線束のイメージ図 (大巻次郎 2023)

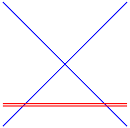
$y^2 = 0, \ x^2 + yz = 0$



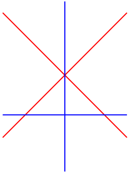
$xz = 0, \ x^2 + yz = 0$



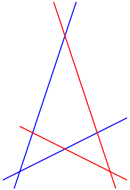
$x^2 = 0, \ y^2 + z^2 = 0$



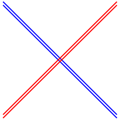
$x^2 + y^2 = 0, \ y^2 + yz = 0$



$x^2 + y^2 = 0, \ x^2 + z^2 = 0$



$x^2 = 0, \ y^2 = 0$



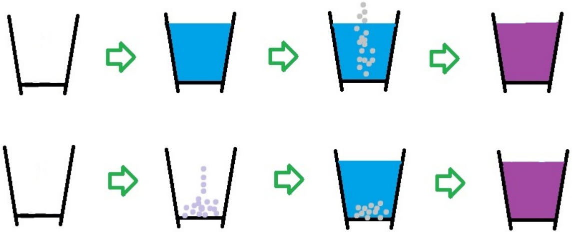
非可換とは何か

(1) 水を入れてから, 砂糖を入れる

(2) 砂糖を入れてから, 水を入れる

両方とも同じ砂糖水ができる

$\longrightarrow$「可換」 $(xy = yx)$



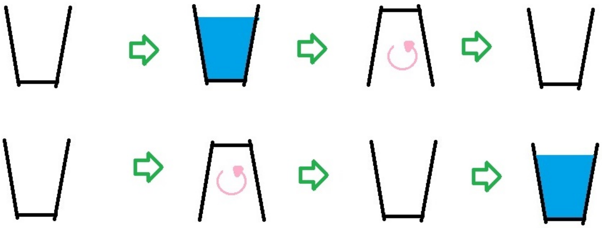
非可換とは何か

(1) 水を入れてから，コップを一回転する

(2) コップを一回転してから，水を入れる

片方には水が入っているが片方には無い

$\longrightarrow$「非可換」($xy = yx$ とは限らない)



非可換多項式の発見

M. Artin と W. Schelter は $\mathbb{C}\langle x,y\rangle/(x^2-xy+yx)$ や $\mathbb{C}\langle x,y\rangle/(xy-\alpha yx)$ $(0\neq\alpha\in\mathbb{C})$ などの特に性質がよいものを量子多項式環として, 一部の分類を行った.

定義: 量子多項式環 (M. Artin-W. Schelter 1987)

次数付き代数 A が以下の (1) と (2) と (3) を満たすとき, n **次元量子多項式環**という.

(1) $\operatorname{gldim} A = n$

(2) $H_A(t) = \dfrac{1}{(1-t)^n}$

(3) 任意の i に対して, $\dim_{\mathbb{C}} \underline{\mathrm{Ext}}^i_A(\mathbb{C},\mathbb{C}) < \infty$ であり,

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_A(\mathbb{C},A) = \begin{cases} \mathbb{C}(n) & (i=n) \\ 0 & (i\neq 0) \end{cases}$$

3次元量子多項式環の分類/表示

射影代数多様体とその自己同型写像という代数幾何学の応用によって, 分類への道すじが見える.

M. Artin-J. Tate-M. Van den Bergh 1990 / 松野仁樹-板場綾子 2018

(1) 3次元量子多項式環の集合から, 射影多様体とその自己同型写像の組 (E, σ) の集合への単射写像が存在する.

(2) 3次元量子多項式環の表示を具体的に求める.

量子多項式環

M. Artin-J. Tate-V. Bergh 1990

A を 3 次元量子多項式環とする．このとき，ある射影多様体 E と自己同型写像 $\sigma : E \to E$ が存在して，E と σ から構成される幾何的代数と同型となる．
さらに，その射影多様体は $\mathbb{P}^2$ であるか，$\mathbb{P}^2$ 内の 3 次曲線に限られる．

可換の場合の対応

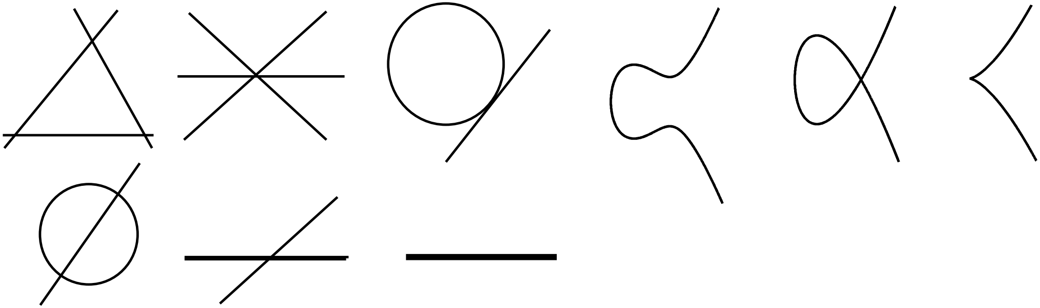
$$多項式 \longleftrightarrow 幾何$$

非可換の場合の対応

$$多項式 \longleftrightarrow 幾何 + 変換\ (無限個存在する)$$

10 種類の幾何の表示

E は $\mathbb{P}^2$ 又は, 以下の 3 次曲線



量子 xy 平面の分類

量子射影平面を非斉次化したものを**量子 xy 平面**とよぶ.

量子 xy 平面の分類 (秋山涼 2013 年修士論文, 第 101 回サイエンスカフェ)

量子 xy 平面は, 次の方程式を満たす点全体の集合と同型である. ただし, $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$

(1) $xy - \alpha yx = 0$

(2) $xy - \alpha yx - 1 = 0$

(3) $xy - yx - x = 0$

(4) $xy - yx - x^2 = 0$

(5) $xy - yx - x^2 - 1 = 0$

カラビヤウ量子2次曲線

量子 xy 平面での 2 次曲線について考える.

量子 2 次曲線

非可換 2 次方程式

$$a_1x^2 + a_2xy + a_3yx + a_4y^2 + a_5x + a_6y + a_7 = 0$$

の量子 xy 平面内での解の集合を, **量子 2 次曲線**という.

量子 2 次曲線を斉次化したものを**量子射影 2 次曲線**という.

カラビヤウ量子射影2次曲線の分類

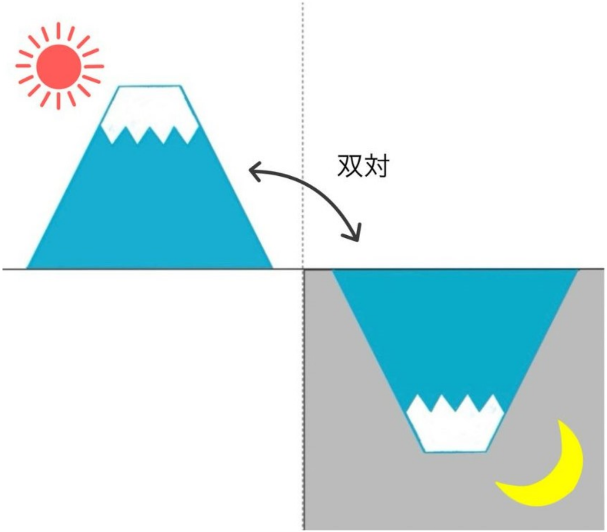
定理 (H. Hu-松野仁樹-毛利出 2023)

カラビヤウ量子射影2次曲線は,

(1) 射影2次曲線であるか, または

(2) その双対が射影2次曲線束のいずれかである.

双対



カラビヤウ量子射影2次曲線の分類

H. Hu-松野仁樹-毛利出 2023

カラビヤウ量子射影2次曲線が

1. 可換ならば, 以下のいずれかの方程式で表される射影2次曲線.

$$(1)\ x^2 = 0 \qquad (2)\ x^2 + y^2 = 0 \qquad (3)\ x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

2. 可換ではないならば, その双対は以下のいずれかの連立方程式で表される射影2次曲線束.

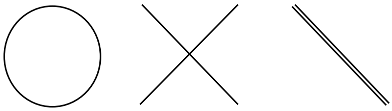
$$(1)\ \begin{cases} y^2 = 0 \\ x^2 + yz = 0 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} xz = 0 \\ x^2 + yz = 0 \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} x^2 = 0 \\ y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$$

$$(4)\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ y^2 + yz = 0 \end{cases} \qquad (5)\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ x^2 + z^2 = 0 \end{cases} \qquad (6)\ \begin{cases} x^2 = 0 \\ y^2 = 0 \end{cases}$$

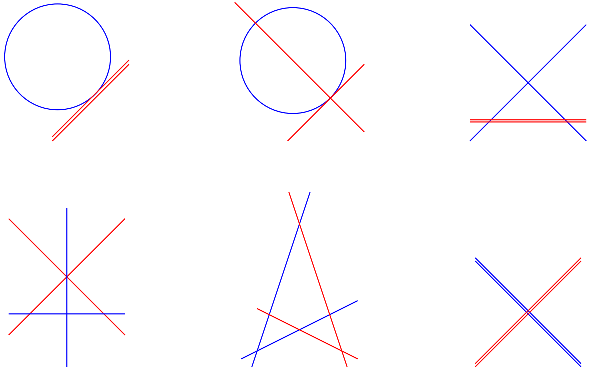
カラビヤウ量子射影2次曲線の分類結果

カラビヤウ量子射影2次曲線の分類結果のイメージ図 (H.Hu-松野仁樹-毛利出 2023)

可換の場合



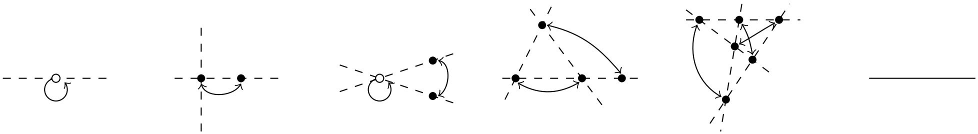
非可換の場合 (双対)



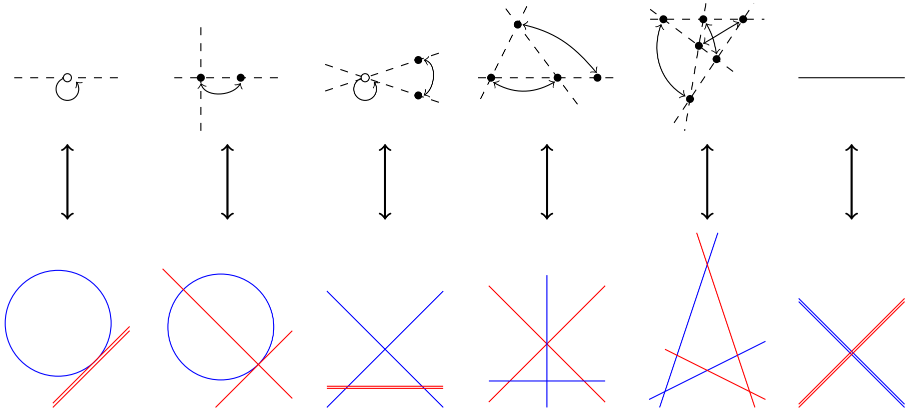
非可換2次曲線

非可換2次曲線のイメージ図

$$\#(E_A) = 1 \quad \#(E_A) = 2 \quad \#(E_A) = 3 \quad \#(E_A) = 4 \quad \#(E_A) = 6 \quad \#(E_A) = \infty$$



非可換2次曲線



フロベニウス代数

定義

有限次元 $\mathbb{C}$ 代数 A が左 A 加群としての同型

$$A \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, \mathbb{C})$$

が成り立つとき A は**フロベニウス代数**という。

4 次元可換フロベニウス代数の分類

4 次元可換フロベニウス代数 (塚本航平 2024 年修士論文)

4 次元可換フロベニウス代数は次の 6 つの連立方程式で表される.

$$(1)\ \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} y^2 + xy = 0 \\ x^2 + y = 0 \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} x^2 = 0 \\ y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$(4)\ \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ y^2 + y = 0 \end{cases} \qquad (5)\ \begin{cases} y^2 = 0 \\ x^2 + y = 0 \end{cases} \qquad (6)\ \begin{cases} x^2 = 0 \\ y^2 = 0 \end{cases}$$

4次元可換フロベニウス代数と射影2次曲線束

4次元可換フロベニウス代数と射影2次曲線束の対応 (塚本航平 2024年修士論文)

4次元可換フロベニウス代数と射影2次曲線束の間に次の対応がある.

$$\{4\text{次元可換フロベニウス代数}\}\ \underset{\text{斉次化}}{\overset{\text{非斉次化}}{\leftrightarrows}}\ \{\text{射影}2\text{次曲線束}\}$$

4次元可換フロベニウス代数 射影2次曲線束

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \underset{\text{斉次化}}{\overset{\text{非斉次化}}{\leftrightarrows}} \quad \begin{cases} x^2 - z^2 = 0 \\ y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

4次元フロベニウス代数の分類

4次元フロベニウス代数の分類（竹田宏紀）

4次元フロベニウス代数は下記のいずれか10個の $\mathbb{C}$ 代数に同型である．
さらに，この10個の $\mathbb{C}$ 代数はどの2つも同型ではない．ただし，$\lambda \neq 0, 1$

$\mathbb{C}^4$	$(\mathbb{C}[x]/(x^2))^2$	$\mathbb{C}\langle x, y\rangle/(xy + yx, x^2 - 1, y^2 - 1)$
$\mathbb{C}[x]/(x^4)$	$\mathbb{C}[x, y]/(x^2, y^2)$	$\mathbb{C}\langle x, y\rangle/(xy + yx, x^2 + xy, y^2)$
$\mathbb{C} \times \mathbb{C}[x]/(x^3)$	$\mathbb{C}\langle x, y\rangle/(xy - \lambda yx, x^2, y^2)$	
$\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}[x]/(x^2)$	$\mathbb{C}\langle x, y\rangle/(xy + yx, x^2 - 1, y^2)$	

量子射影 2 次曲線の分類

予想

量子射影 2 次曲線と 4 次元フロベニウス代数は 1 対 1 に対応するのではないか？

みなさんも非可換の世界に飛び込んでみませんか？