2025 年度
静岡大学大学院総合科学技術研究科
修士課程・理学専攻・物理学コース
一般入試

専門（物理学）

＜注意事項＞

1. 問題は【1】～【3】の 3 問であり、配点は各問題に記載されている。
2. 解答用紙は問題ごとに別にし、それぞれに受験番号と問題番号を記入せよ。
   裏面を使用しても良い。
3. 解答には途中の導き方を示すこと。

【1】　次の問いに答えよ。(配点　33%)

［A］図 1 のような巻数が N で、長さ ℓ、半径 a の密にらせん状に導線が巻かれたコイル（ソレノイド）に一定の電流 I_0 が流れている。真空の透磁率をμ_0として次の問いに答えよ。

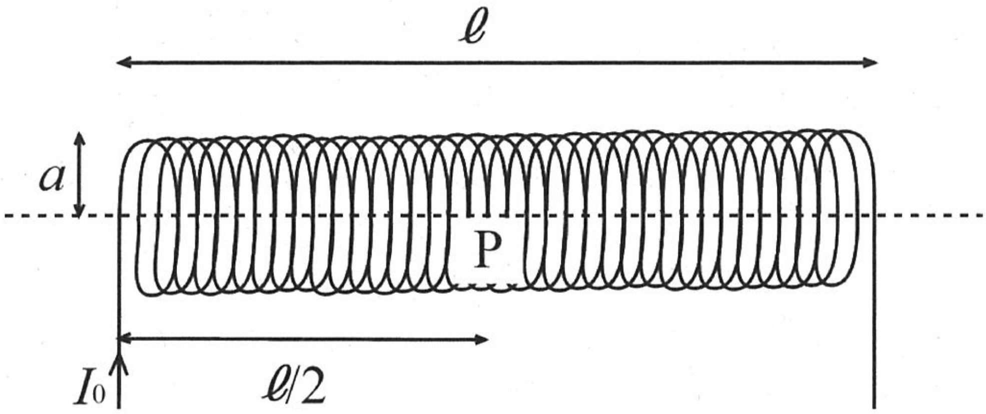

図 1

(1) ビオ・サバールの法則

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0 d\vec{s} \times \vec{r}}{4\pi |\vec{r}|^3}$$

を使って、ソレノイドの中心（点 P）での磁束密度の大きさを求めよ。ここで、導線を流れる電流素片$I_0 d\vec{s}$が点 P に作る磁束密度素片が$d\vec{B}$で、$\vec{r}$は電流素片から点 P への位置ベクトルである。

(2) 微分形のマクスウェル方程式より、アンペールの法則

$$\oint_C \vec{H}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = I$$

を示せ。ここで、C は線積分の経路、$\vec{H}(\vec{r})$は位置ベクトル$\vec{r}$での磁場、$d\vec{s}$は C にそった微小線素、I は C を縁とする曲面を通る電流の合計である。

(3) ソレノイドの半径は長さに対して十分に小さいとし、ソレノイドの内部の磁束密度は一様で、外部の磁束密度を 0 とする。アンペールの法則を使って、内部の磁束密度の大きさを求めよ。

［B］図 2 のように抵抗 R の抵抗器と、自己インダクタンス L のコイルが、時間に依存しない直流電圧 V_0 に接続されている。t=0 でスイッチ SW を ON にしたとき、回路に流れる電流を $I(t)$として次の問いに答えよ

(4) 電流 $I(t)$ に対する微分方程式を求めよ。

(5) 初期条件を $I(0)$=0 として回路に流れる電流 $I(t)$を求め、簡単なグラフをかけ。

［C］図 3 のように、抵抗 R の抵抗器と、自己インダクタンス L のコイルと、静電容量 C のコンデンサーが直列接続されている回路に角周波数ωの交流電源（$v(t) = E_0 \sin\omega t$）が接続されている。回路に流れ

る電流を$I(t)$として次の問いに答えよ。

（6）交流電源の電圧の実効値V_eを求めよ。実効値は、電圧の2乗$v^2(t)$の1周期での時間平均値の平方根である。

（7）図の回路に流れる電流$I(t)$の2階の微分方程式が、

$$L\frac{d^2I(t)}{dt^2}+R\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{C}I(t)=\omega E_0\cos\omega t$$

であることを示せ。

（8）(7)の微分方程式を$E_0=0$として、一般解を求めよ。ただし、$R<2\sqrt{LC}$とする。

（9）(7)の微分方程式の特解を求めよ。ただし、$\omega^2\neq 1/(LC)$とする。

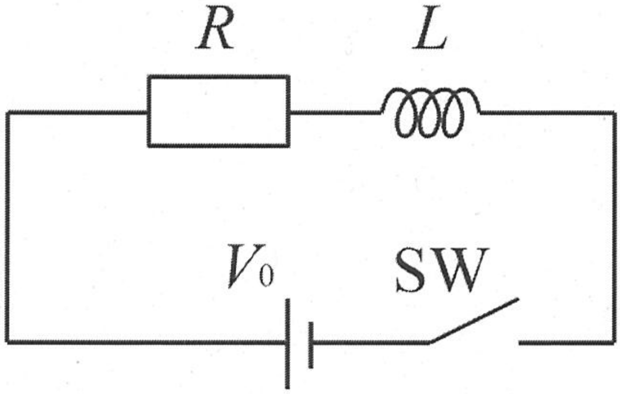

図2

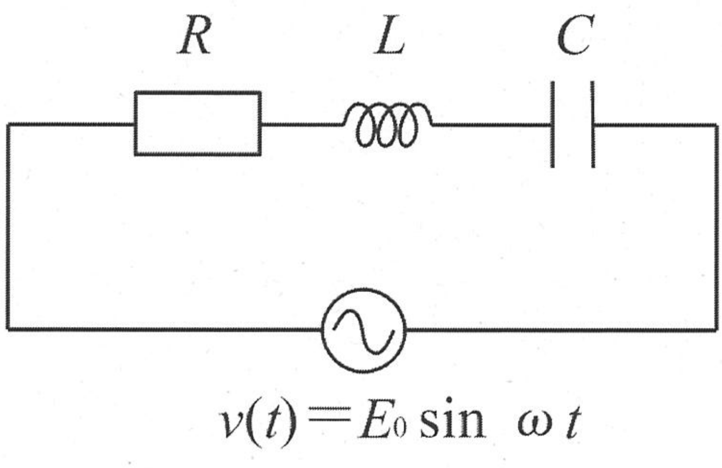

図3

【2】 質量 m の同種の単原子分子が N 個, 半径 R, 高さ h の円柱型の断熱容器に封入されている. 図 1 のように円柱の縦方向を z, 水平方向を x, y, 底面の円の中心を原点とする直交座標系をとる. 粒子はお互い非常に弱く相互作用し, 熱平衡状態が実現している. 重力の影響は無視できるのもとする. 古典統計力学にもとづき以下の問いに答えよ. (配点 33%)

1. まず容器内の 1 個の粒子について考える. 粒子の位置を $\vec{r}=(x,y,z)$, 運動量を $\vec{p}=(p_x,p_y,p_z)$ とする. またこの粒子のハミルトニアンを H_1 とし, z 軸まわりの角運動量を L_1 とする. そしてこれらはそれぞれ次のように与えられる.

$$H_1 := \frac{1}{2m}\vec{p}^{\,2}, \quad L_1 := xp_y - yp_x. \tag{1}$$

古典力学にもとづき L_1 が保存量であることを示せ. ただし簡単のため粒子と容器との衝突は考えないものとする. (なお, 容器と粒子との弾性衝突を考慮しても, L_1 は保存量となる.)

次に N 個の粒子について考える. 容器内の全粒子の z 軸まわりの角運動量とエネルギーの総量をそれぞれ J と E とする. 容器は断熱されているため E と J は保存する. これらの粒子が熱平衡状態にあり, そのエントロピーを S とし, S と E, N, J の間に次の関係が成立する.

$$S = S(E,N,J), \quad dS = k_B\beta\left(dE - \mu dN - \omega dJ\right), \tag{2}$$

$$\beta := \frac{1}{k_B}\frac{\partial S}{\partial E}, \quad \mu := -\frac{1}{k_B\beta}\frac{\partial S}{\partial N}, \quad \omega := -\frac{1}{k_B\beta}\frac{\partial S}{\partial J}. \tag{3}$$

ここで k_B はボルツマン定数である.

この容器内で中心軸から距離 r $(0 < r \le R)$ の位置に, 底面積 ΔA (ΔA は十分小さい量), 高さ h の細長い領域を考え, この領域を K と呼ぶことにする (図 1). また領域 K 内である状態が実現する確率を w_n とする. ここでこの状態における領域 K 内での粒子数を N_n, エネルギーを E_n, 角運動量を J_n とし, 領域 K の外側のエントロピー $S(E-E_n, N-N_n, J-J_n)$ を評価することで次の関係を得る.

$$w_n \propto e^{-\beta(E_n - \mu N_n - \omega J_n)}. \tag{4}$$

ただし, $E_n \ll E$, $N_n \ll N$, $J_n \ll J$ を仮定した.

以後, (4) 式を利用して容器内の粒子数密度を求める. まず (4) 式で, i 番目の粒子 $(1 \le i \le N_n)$ の位置と運動量をそれぞれ $\vec{r}_i$, $\vec{p}_i$ とすると, 次を得る.

$$w_n \propto \exp\left[\beta\mu N_n - \beta\sum_{i=1}^{N_n}\left(H_i - \omega L_i\right)\right], \quad H_i := \frac{1}{2m}\vec{p}_i^{\,2}, \quad L_i := x_i p_{iy} - y_i p_{ix}. \tag{5}$$

ここで領域 K の底面積 ΔA が十分小さいので, $x_i \simeq x$, $y_i \simeq y$ と近似する. ただし x, y は領域 K の xy 平面での座標で $x^2+y^2=r^2$ を満たす. また今, 注目している粒子数 N_n 以外の量については積分することにする. このとき領域 K に粒子が N_n 個存在する確率を $P(N_n)$ とすると, $P(N_n)$ は次の量に比例する.

$$P(N_n) \propto \frac{1}{N_n!}\left((\Delta A)^{N_n}\prod_{i=1}^{N_n}\int_0^h dz_i\right)\left(\prod_{i=1}^{N_n}\int_{-\infty}^{\infty} d\vec{p}_i\right) w_n \propto Z(N_n), \tag{6}$$

$$Z(N_n) := \frac{1}{N_n!}e^{\beta\mu N_n}\left(Z_1\right)^{N_n}, \tag{7}$$

$$Z_1 := \Delta A\int_0^h dz\int_{-\infty}^{\infty} d\vec{p}\exp\left[-\beta\left(H_1 - \omega L_1\right)\right]. \tag{8}$$

ここで H_1 と L_1 は (1) 式で与えられている. これをふまえて以下の問いに答えよ.

2. (6) 式と (7) 式を用いて領域 K での粒子数の期待値 $\langle N_n\rangle$ が次で与えられることを示せ.

$$\langle N_n\rangle = e^{\beta\mu}Z_1. \tag{9}$$

ただし, N が十分大きな数とする近似を用いた.

3. a を正の実数, b を実数として, 次の定積分を証明せよ.

$$\text{(i)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}, \qquad \text{(ii)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2+bx} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{2a}}. \tag{10}$$

4. (8) 式の積分を行い, Z_1 を求めよ. 最終的な解答は ω, β, m, k_B, x, y, r, h, ΔA から必要なものを用いて書くこと.

5. (9) 式を用いると容器内の全粒子数の期待値は次のようになる.

$$(\text{容器内の粒子数の期待値}) = \int_{x^2+y^2 \leq R^2} dxdy \int_0^h dz \frac{e^{\beta\mu} Z_1}{h\Delta A}. \tag{11}$$

この積分を実行し, 得られた粒子数の期待値が全粒子数 N に等しいという条件から, μ を求めよ. 最終的な解答は ω, β, m, k_B, N, R, h, ΔA から必要なものを用いて書くこと.

6. 円柱の中心軸から距離 r の位置における単位体積当たりの粒子数密度 $\rho(r)$ の期待値を求めよ. 最終的な解答は ω, β, m, k_B, N, r, R, h, ΔA から必要なものを用いて書くこと.

7. $\rho(r)$ を r の関数として概略を図示せよ.

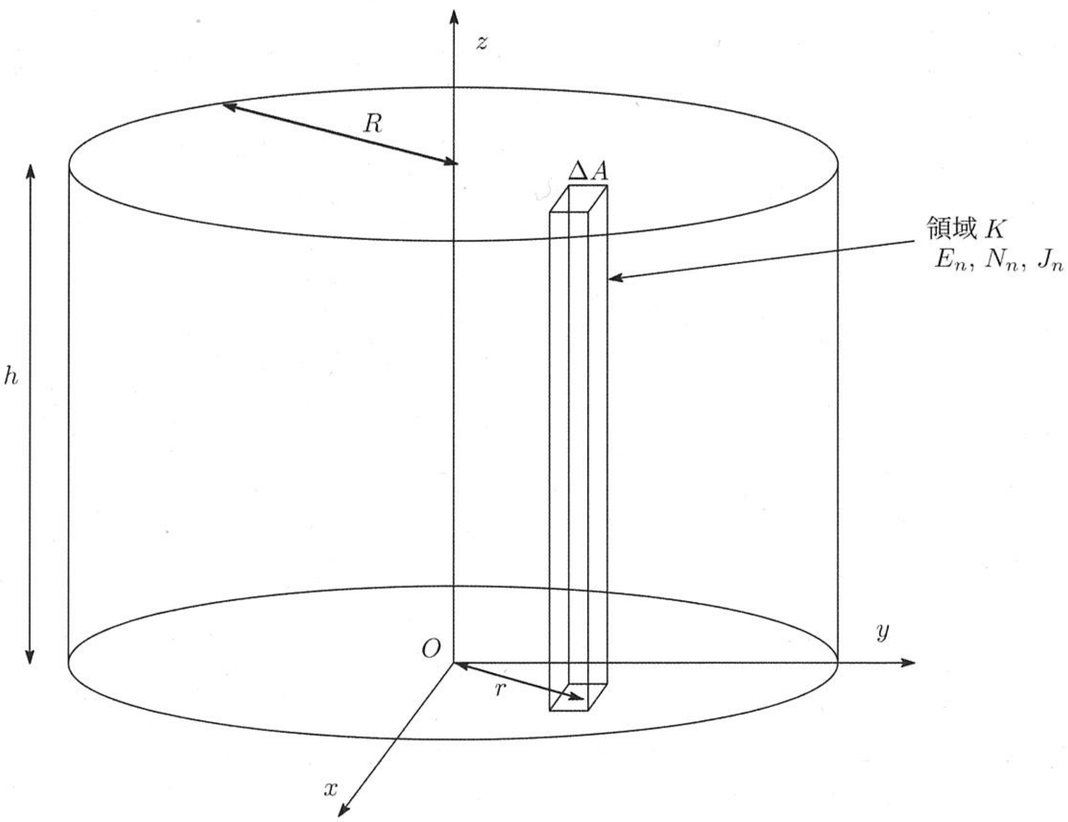

図 1: 円柱型の断熱容器

【3】 次の問いに答えよ。$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$（h はプランク定数）であり，$[\hat{A}, \hat{B}]$ は演算子 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の交換関係を表す。また，この問いに登場するすべての状態は大きさが 1 に規格化されているとする。（配点 34%）

[A] 質量 m，固有角振動数 ω の 1 次元調和振動子を考える。この系のハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$$

である。$\hat{p}$, $\hat{x}$ はそれぞれ運動量と位置の演算子である。以下では，$\hat{a} = \sqrt{\dfrac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \dfrac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$ とし，そのエルミート共役を $\hat{a}^\dagger$ とする。

(1) $\hat{x}$ と $\hat{p}$ の正準交換関係を用いて，$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ を求めよ。

(2) $\hat{H}_{\mathrm{A}}$ を $\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \omega, \hbar$ で表せ。

(3) $\hat{a}\,|0\rangle = 0$ という方程式を満たす状態 $|0\rangle$ が $\hat{H}_{\mathrm{A}}$ の固有状態であることを示し、対応する固有エネルギー E_0 を求めよ（$\omega, \hbar$ で表せ）。

(4) $|1\rangle = \hat{a}^\dagger\,|0\rangle$ で与えられる状態 $|1\rangle$ が $\hat{H}_{\mathrm{A}}$ の固有状態であることを示し、対応する固有エネルギー E_1 を求めよ（$\omega, \hbar$ で表せ）。

[B] エネルギー固有状態が基底状態 $|\mathrm{g}\rangle$ と励起状態 $|\mathrm{e}\rangle$ の 2 個しかない系（2 準位系）を考える（もちろん $|\mathrm{g}\rangle$ と $|\mathrm{e}\rangle$ は直交する）。この系のハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\mathrm{B}} = \frac{\hbar\omega}{2}\hat{\sigma}_z$$

である。ω は [A] の調和振動子の固有角振動数と同じ値の角振動数で，$\hat{\sigma}_z = |\mathrm{e}\rangle\langle\mathrm{e}| - |\mathrm{g}\rangle\langle\mathrm{g}|$ である。

(5) $\hat{H}_{\mathrm{B}}$ の基底エネルギー E_{g} と励起状態のエネルギー E_{e} を求めよ（$\omega, \hbar$ で表せ）。

[C] [A] の調和振動子と [B] の 2 準位系が相互作用する複合系を考える。この複合系のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \hat{H}_{\mathrm{A}} + \hat{H}_{\mathrm{B}} + \hbar\nu(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- + \hat{a}\hat{\sigma}_+)$$

だとする。ν は相互作用の強さを表す正の定数であり，$\hat{\sigma}_- = |\mathrm{g}\rangle\langle\mathrm{e}|$ および $\hat{\sigma}_+ = |\mathrm{e}\rangle\langle\mathrm{g}|$ である。また，調和振動子の演算子 $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ と 2 準位系の演算子 $(\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-)$ は可換である。

(6) $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-$ とするとき，$[\hat{H}, \hat{n}] = 0$ が成り立つことを示せ。このことから，$\hat{n}$ はこの複合系の保存量であると分かる。

(7) 調和振動子の状態が $|0\rangle$ で，2 準位系の状態が $|\mathrm{e}\rangle$ という複合系の状態を $|0, \mathrm{e}\rangle$ と書く。同様に，調和振動子の状態が $|1\rangle$ で，2 準位系の状態が $|\mathrm{g}\rangle$ という複合系の状態を $|1, \mathrm{g}\rangle$ と書く。$\hat{H}$ の固有状態のうち $\hat{n}$ の固有値が 1 であるものは 2 個あり（$|+\rangle$ および $|-\rangle$ とする），それらは $|0, \mathrm{e}\rangle$ と $|1, \mathrm{g}\rangle$ の線形結合 $|\pm\rangle = a_\pm\,|0, \mathrm{e}\rangle + b_\pm\,|1, \mathrm{g}\rangle$ で書ける。
$|+\rangle$，$|-\rangle$ それぞれに対応する $\hat{H}$ の固有値 E_+, E_-, および係数 a_+, b_+, a_-, b_- を求めよ。$E_\pm$ は $\omega, \nu, \hbar$ で表すこと。ただし，$E_+ > E_-$ とする。

(8) 初期時刻 $t = 0$ において複合系が $|\psi_0\rangle = |0, \mathrm{e}\rangle$ の状態にあったとする。このとき，時刻 $t\ (>0)$ における複合系の状態 $|\psi(t)\rangle$ を $|\psi(t)\rangle = a(t)\,|0, \mathrm{e}\rangle + b(t)\,|1, \mathrm{g}\rangle$ と書くとき，$a(t)$ および $b(t)$ を求めよ（$\omega, \nu, \hbar, t$ のうち必要なもので表せ）。

(9) 前問の時刻 t での複合系の状態 $|\psi(t)\rangle$ において，2 準位系の状態が $|\mathrm{e}\rangle$ である確率を求めよ（$\omega, \nu, \hbar, t$ のうち必要なもので表せ）。