静岡大学大学院総合科学技術研究科
修士課程・理学専攻・数学コース

２０２５年度入学試験問題

専　門（数　学）

注意事項：

$\boxed{\mathrm{E}}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ のすべてに解答せよ.
なお解答用紙は問題ごとに別にし, 各用紙に問題番号を明記せよ.
紙面が不足した場合は解答用紙の裏面を使用してもよい.

$\boxed{\mathrm{E}}$

次の命題の証明を英語で書け．ただし，論理記号（$\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$ など）を使わないこと．

(1) 実数の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$ であるとする．このとき，$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ である．

(2) X, Y を位相空間，$f : X \to Y$ を連続写像とする．V_1, V_2, V_3 を Y の開集合とする．このとき，$f^{-1}((V_1 \cup V_2) \cap V_3)$ は X の開集合である．

$\boxed{1}$　次の各問に答えよ.

(1) f を $\mathbb{R}$ で定義された実数値関数, $a \in \mathbb{R}$ とする. このとき, 次の (a), (b) が同値であることを示せ.

(a) f は a で連続である.

(b) a に収束する任意の数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$ に対して, 数列 $\{f(a_n)\}_{n=1,2,\cdots}$ は $f(a)$ に収束する.

(2) 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ は $\mathbb{R}$ で C^1 級であることを示せ.

(3) a, b を 0 でない定数とする. このとき, $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数 f が $bf_x = af_y$ を満たすならば, $f(x,y) = g(ax+by)$ の形に表されることを示せ.

(4) $\alpha > 0$ とする. 次の広義積分の収束・発散を判定せよ.

$$\iint_D (1-x^2-y^2)^{-\alpha}\, dxdy, \quad D = \{(x,y); 0 \leq x^2+y^2 < 1\}.$$

$\boxed{2}$ 複素正方行列 N について, ある自然数 k が存在して $N^k = O$ となるとき, N を冪零行列という.

次の各問に答えよ.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が冪零行列であることを示せ.

(2) 一般に, 対角成分がすべて 0 である上三角行列は冪零行列である. これを示せ.

(3) N を n 次冪零行列とする. ただし $N \neq O$ とする. m を $N^m = O$ なる最小の自然数とするとき, $m \leq n$ であることを次の手順で示せ.

(i) $N^{m-1}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ なる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ が存在することを示せ.

(ii) (i) のような $\boldsymbol{x}$ に対して, $\boldsymbol{x}, N\boldsymbol{x}, \ldots, N^{m-1}\boldsymbol{x}$ が一次独立であることを示せ.

(iii) $m \leq n$ であることを結論づけよ.

$\boxed{3}$ X と Y を位相空間とする．写像 $f : X \to Y$ について，次の各問に答えよ．

(1) 次の (a) と (b) は同値になることを示せ．

(a) Y の任意の開集合 U に対して，$f^{-1}(U)$ は X の開集合になる．

(b) X の各点 x において，次が成り立つ: Y における $f(x)$ の任意の近傍 U に対して，X における x の近傍 V で $f(V) \subseteq U$ となるものが存在する．

(2) いま X と Y を距離空間，d_X と d_Y をそれぞれ X と Y の距離とする．次の (c) は上の (a) および (b) と同値になることを示せ．

(c) X の各点 x において，次が成り立つ: 任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，$x' \in X$ について，$d_X(x, x') < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$ が成り立つ．

(3) $f : X \to Y$ を連続な閉写像とする．このとき，次の (d) を示せ．

(d) X の任意の部分集合 A について，$f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ が成り立つ．ただし，$\overline{A}$ は X における A の閉包，$\overline{f(A)}$ は Y における $f(A)$ の閉包とする．

(4) $f : X \to Y$ を全単射とする．このとき，f が同相写像になることと上の (d) は同値になることを示せ．