

三角形の鏡映による敷き詰めから

鏡映群とコクセター群へ

2024 年 5 月 23 日

静岡大学 理学部 数学科 保坂哲也

M.C. エッシャーの絵「円の極限 IV 天国と地獄」では、

「天使」と「悪魔」が鏡映の敷き詰めとして描かれています。

このフラクタルのような独特な絵はどのような規則性で描かれているのか？

これを今回のひとつの目標に、このことにまつわる数学を紹介したいと思います。

2024/5/23

1 / 52

2024/5/23

2 / 52

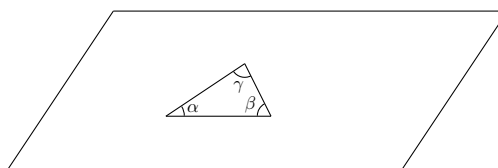
準備 「曲率」とは？

- ・考えている空間 (世界) の曲がり具合を「曲率」といいます。
- ・例えば、三角形を考えたときに常に内角の和が 180° ($= \pi$) になる空間をユークリッド空間という。この空間の曲率は 0 (平らな空間) と考える。
- ・もしも三角形の内角の和が 180° ($= \pi$) よりも常に大きいときはその空間の曲率は正と考える。
- ・もしも三角形の内角の和が 180° ($= \pi$) よりも常に小さいときはその空間の曲率は負と考える。

2024/5/23

3 / 52

ユークリッド平面の三角形



$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

(三角形の内角の和は 180°)

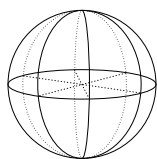
→ このとき「曲率 = 0」

2024/5/23

4 / 52

球面の三角形

球面 (例えば地球儀) の上に三角形を描いてみると三角形の内角の和は 180° ($= \pi$) よりも大きいことがわかる。
したがって、球面 (地球儀) という空間の曲率は 0 よりも大きい正の値をとる。



2024/5/23

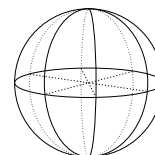
5 / 52

球面の曲率について

半径 1 の球面の曲率は 1



半径 2 の球面の曲率は $1/2$



半径が大きくなるにつれ球面の曲率 (曲がり具合) は小さく 0 に近づいていく
(例：地球)



2024/5/23

6 / 52

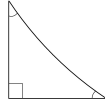
負の曲率と双曲平面

三角形の内角の和が $180^\circ (= \pi)$ よりも常に小さくなる
ときその空間の曲率は負となる。

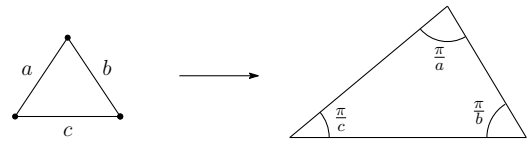
このときの三角形は、球面に描かれる太った三角形とは
逆に、やせた細長い三角形になります。

一定の負の曲率を持つ平面を「双曲平面」とよびます。

負の曲率の双曲平面はどのような空間
(世界) なのか、あとでご紹介します。



ダイアグラムと三角形



左の図のようなダイアグラムを考える
(ここで a, b, c は 2 以上の自然数とする)
左の図のダイアグラムに対して、
右の図のような角度を持つ三角形を対応させる

2024/5/23

7 / 52

2024/5/23

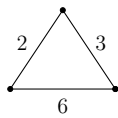
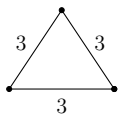
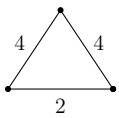
8 / 52

三角形の鏡映による敷き詰め 1

$$\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b} + \frac{\pi}{c} = \pi \text{ のとき}$$

このとき、三角形の内角の和は $180^\circ (= \pi)$

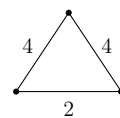
曲率 0 のユークリッド平面に三角形は描くことができる



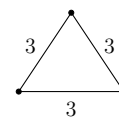
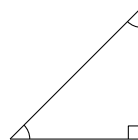
$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$$

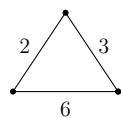
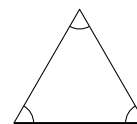
$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \pi$$



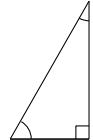
$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \pi$$



$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$$



$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \pi$$

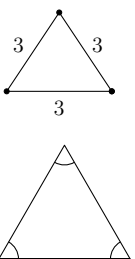


2024/5/23

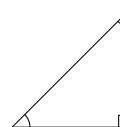
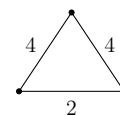
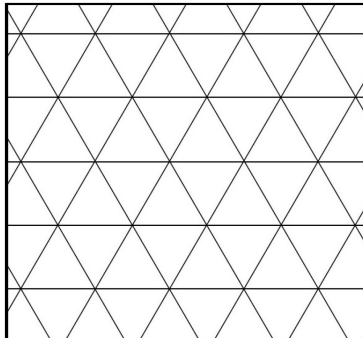
9 / 52

2024/5/23

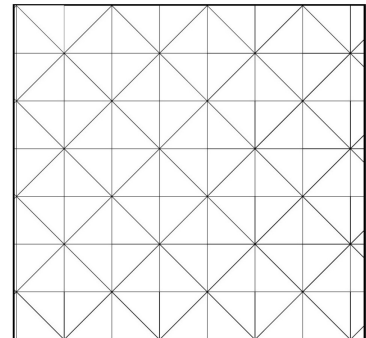
10 / 52



$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$$



$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

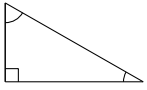
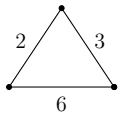


2024/5/23

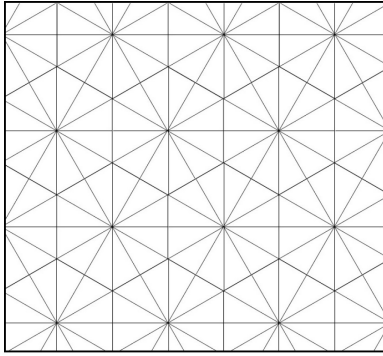
11 / 52

2024/5/23

12 / 52



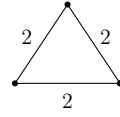
$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \pi$$



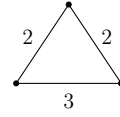
三角形の鏡映による敷き詰め 2

$$\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b} + \frac{\pi}{c} > \pi \text{ のとき}$$

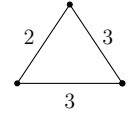
このとき、三角形の内角の和は $180^\circ (= \pi)$ よりも大きい
正の曲率の球面に三角形を描くことができる



$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} > \pi$$

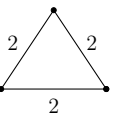


$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} > \pi$$

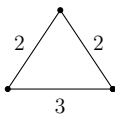
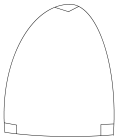


$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} > \pi$$

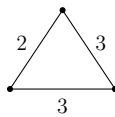
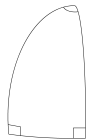
など



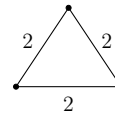
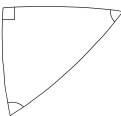
$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} > \pi$$



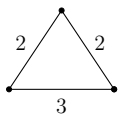
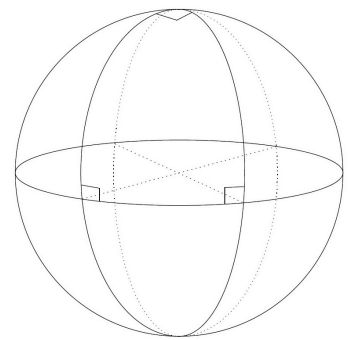
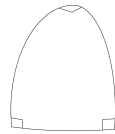
$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} > \pi$$



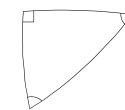
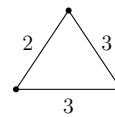
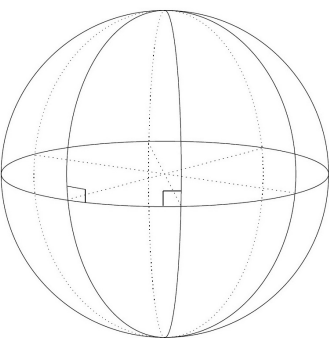
$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} > \pi$$



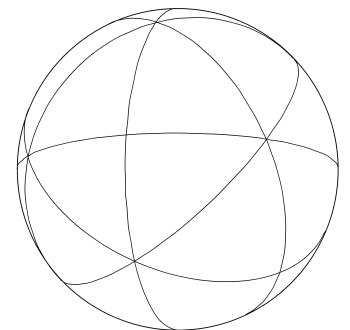
$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} > \pi$$



$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} > \pi$$



$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} > \pi$$

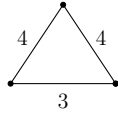
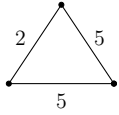


三角形の鏡映による敷き詰め 3

$$\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b} + \frac{\pi}{c} < \pi \text{ のとき}$$

このとき、三角形の内角の和は $180^\circ (= \pi)$ よりも小さい細長い三角形になる

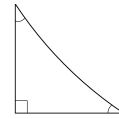
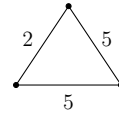
負の曲率の「双曲平面」に三角形を描くことができる



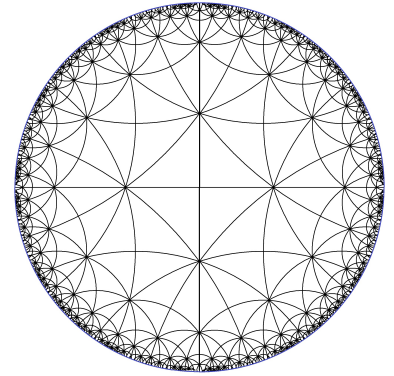
$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{5} < \pi$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} < \pi$$

などなど



$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{5} < \pi$$



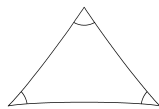
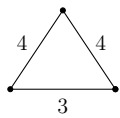
2024/5/23

19 / 52

2024/5/23

20 / 52

エッシャーの絵「円の極限 IV 天国と地獄」では、内角の和が $180^\circ (= \pi)$ よりも小さい三角形として「天使」と「悪魔」が負の曲率の双曲平面に鏡映の敷き詰めとして描かれている



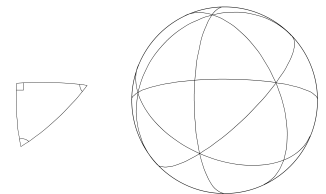
$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} < \pi$$

まとめ 1

$$\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b} + \frac{\pi}{c} > \pi \text{ のとき}$$



- (1) 対応する三角形の内角の和は $180^\circ (= \pi)$ よりも大きい
- (2) 正の曲率の球面に三角形を描くことができる
- (3) 球面に鏡映で三角形の敷き詰めが描ける
- (4) 三角形の数は有限
- (5) 「球面的」とよばれる



2024/5/23

21 / 52

2024/5/23

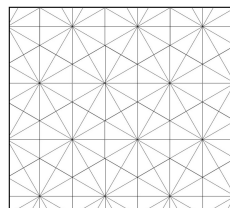
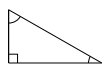
22 / 52

まとめ 2

$$\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b} + \frac{\pi}{c} = \pi \text{ のとき}$$



- (1) 対応する三角形の内角の和は $180^\circ (= \pi)$
- (2) 曲率 0 のユークリッド平面に三角形を描くことができる
- (3) ユークリッド平面に鏡映で三角形の敷き詰めが描ける
- (4) 三角形の数は無限で増加率は多項式的増加
- (5) 「ユークリッド的」とよばれる



2024/5/23

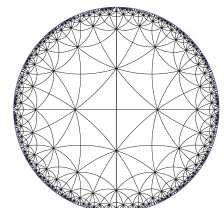
23 / 52

まとめ 3

$$\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b} + \frac{\pi}{c} < \pi \text{ のとき}$$



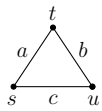
- (1) 対応する三角形の内角の和は $180^\circ (= \pi)$ より小さい
- (2) 負の曲率の双曲平面に三角形を描くことができる
- (3) 双曲平面に鏡映で三角形の敷き詰めが描ける
- (4) 三角形の数は無限で増加率は指数関数的増加
- (5) 「双曲的」とよばれる



2024/5/23

24 / 52

コクセター群とコクセターの定理



左の図のダイアグラムに対して
下のような「群」を対応させる
この群は3次のコクセター群とよばれる



$$W = \langle s, t, u \mid s^2 = t^2 = u^2 = (st)^a = (tu)^b = (us)^c = 1 \rangle$$



この3次のコクセター群に対して
群 W と生成系 S のペアをコクセター系という

(W, S) (ここで $S = \{s, t, u\}$ とする)

$$W = \langle s, t, u \mid s^2 = t^2 = u^2 = (st)^a = (tu)^b = (us)^c = 1 \rangle$$

は次のように考える

- (1) $S = \{s, t, u\}$ を W の生成系とする
- (2) このコクセター群 W の要素は生成系 S の文字 s, t, u を並べた有限列の全部とする
- (3) S の文字 s, t, u を並べた有限列は
 $s^2 = t^2 = u^2 = (st)^a = (tu)^b = (us)^c = 1$
 という等式を用いて移りあえるもの同士は
 W のなかでは同じものとみなす

2024/5/23

25 / 52

2024/5/23

26 / 52

コクセター群の性質

$$W = \langle s, t, u \mid s^2 = t^2 = u^2 = (st)^a = (tu)^b = (us)^c = 1 \rangle$$

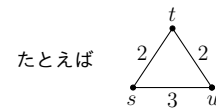
$$ss = s^2 = 1, \quad tt = t^2 = 1, \quad uu = u^2 = 1$$

a が偶数のとき

$$\underbrace{stst \cdots st}_{a \text{ 個}} = (st)^a = 1 \iff \underbrace{st \cdots st}_{a/2 \text{ 個}} = \underbrace{ts \cdots ts}_{a/2 \text{ 個}}$$

a が奇数のとき

$$\underbrace{stst \cdots st}_{a \text{ 個}} = (st)^a = 1 \iff \underbrace{st \cdots st s}_{(a-1)/2 \text{ 個}} = \underbrace{ts \cdots ts t}_{(a-1)/2 \text{ 個}}$$



たとえば のときを紹介すると

$$W = \langle s, t, u \mid s^2 = t^2 = u^2 = (st)^2 = (tu)^2 = (us)^3 = 1 \rangle$$

$$S = \{s, t, u\}$$

$$\begin{aligned} stst = 1 &\iff sts = t \iff st = ts \\ tutu = 1 &\iff tut = u \iff tu = ut \\ ususus = 1 &\iff usu = sus \end{aligned}$$

したがって W の要素は次のようになる

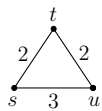
1, $s, t, u, (ss = 1), st, tu,$
 $su, us, (ts = st), (sts = t), sus = usu,$
 $stu, ust, tusu = tsus = stus = suts = sust$ (有限で 12 個)

2024/5/23

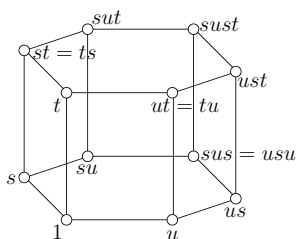
27 / 52

2024/5/23

28 / 52



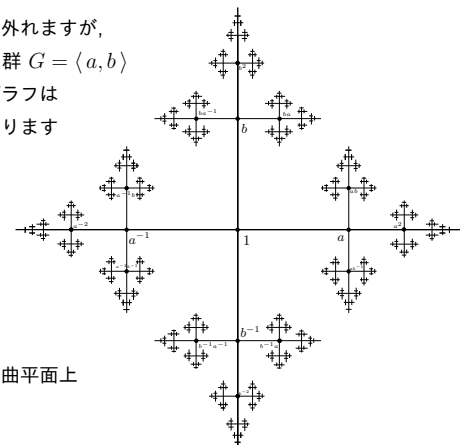
に対応する (W, S) のケーリーグラフは



と描くことができる

→ 六角柱という立体になる

本論とは少し外れますが、
 階数 2 の自由群 $G = \langle a, b \rangle$
 のケーリーグラフは
 右のようになります



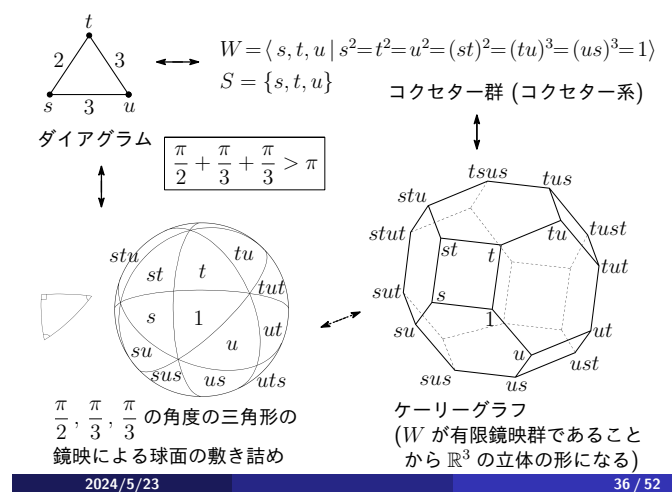
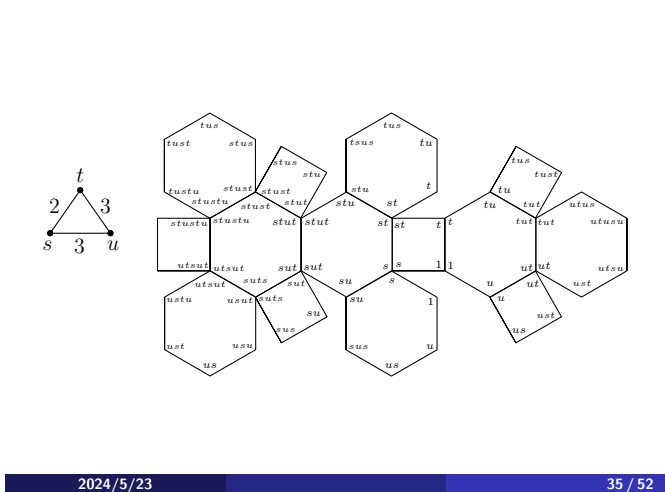
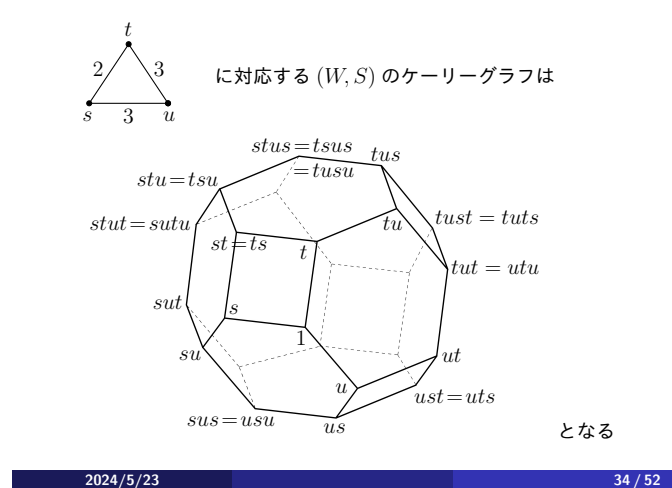
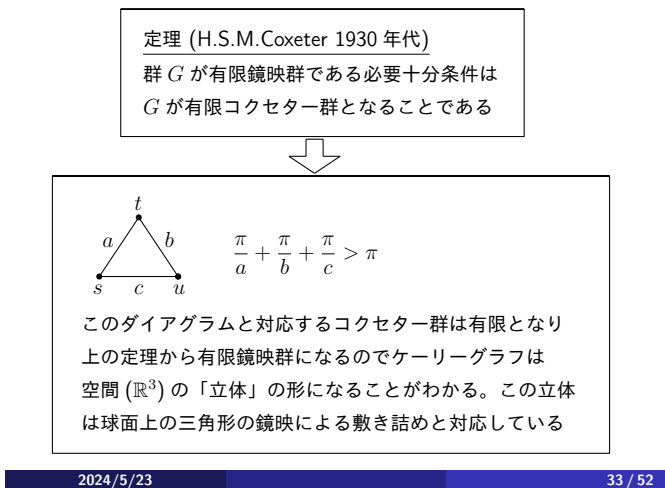
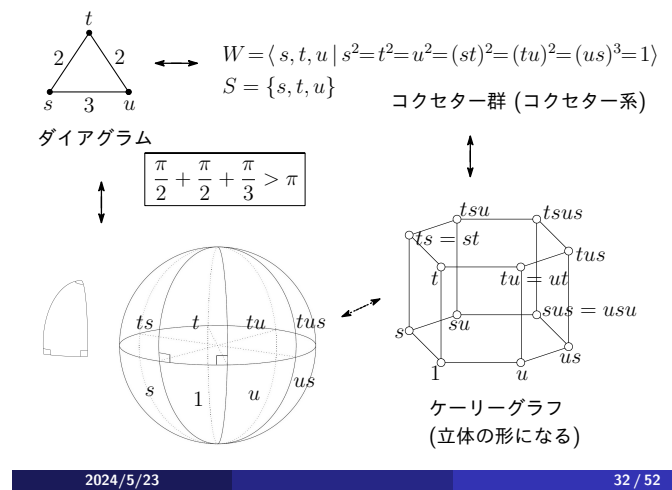
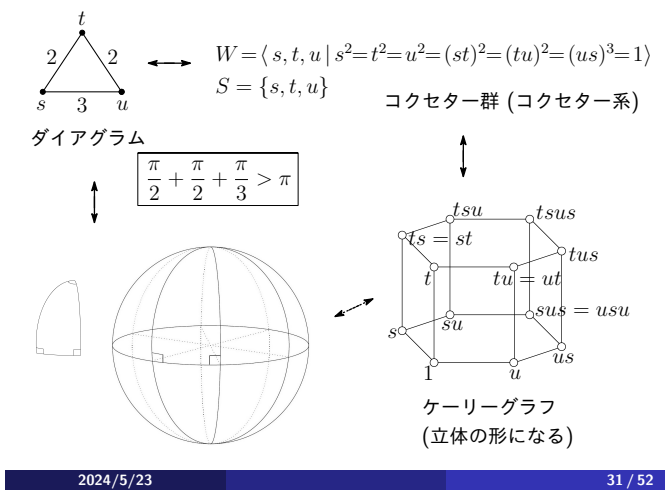
この絵は
 曲率が負の双曲平面上
 に描かれます

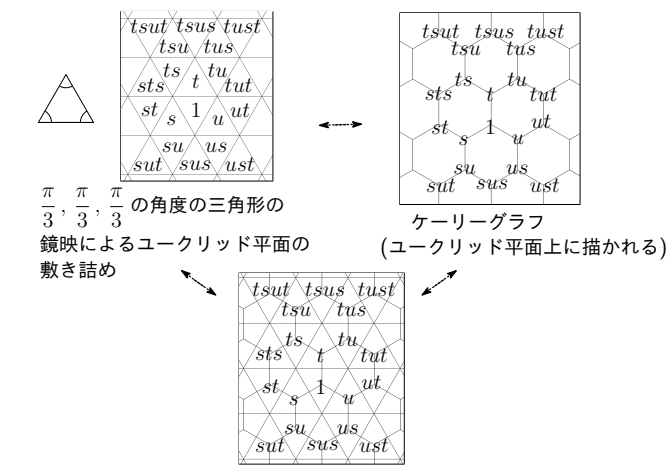
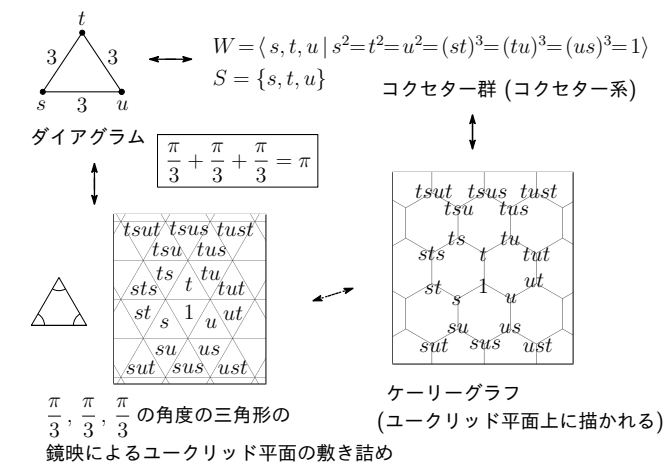
2024/5/23

29 / 52

2024/5/23

30 / 52





コクセター群の性質

$$W = \langle s, t, u \mid s^2 = t^2 = u^2 = (st)^a = (tu)^b = (us)^c = 1 \rangle$$

$$ss = s^2 = 1, \quad tt = t^2 = 1, \quad uu = u^2 = 1$$

a が偶数のとき

$$\underbrace{stst \cdots st}_{a \text{ 個}} = (st)^a = 1 \iff \underbrace{st \cdots st}_{a/2 \text{ 個}} = \underbrace{ts \cdots ts}_{a/2 \text{ 個}}$$

a が奇数のとき

$$\underbrace{stst \cdots st}_{a \text{ 個}} = (st)^a = 1 \iff \underbrace{st \cdots st}_{(a-1)/2 \text{ 個}} = \underbrace{ts \cdots ts}_{(a-1)/2 \text{ 個}}$$

$$W = \langle s, t, u \mid s^2 = t^2 = u^2 = (st)^a = (tu)^b = (us)^c = 1 \rangle$$

(3) S の文字 s, t, u を並べた有限列は

$$s^2 = t^2 = u^2 = (st)^a = (tu)^b = (us)^c = 1$$

という等式を用いて移りあえるもの同士は

W のなかでは同じものとみなす

W の要素 w が

$$w = s_1 s_2 s_3 \cdots s_n = t_1 t_2 t_3 \cdots t_k$$

とあらわされているとき

$$n \text{ は偶数} \iff k \text{ は偶数}$$

$$n \text{ は奇数} \iff k \text{ は奇数}$$

となる

W の要素 w が

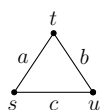
$$w = s_1 s_2 s_3 \cdots s_n = t_1 t_2 t_3 \cdots t_k$$

とあらわされているとき

$$n \text{ は偶数} \iff k \text{ は偶数}$$

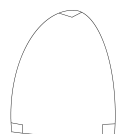
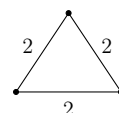
$$n \text{ は奇数} \iff k \text{ は奇数}$$

となる



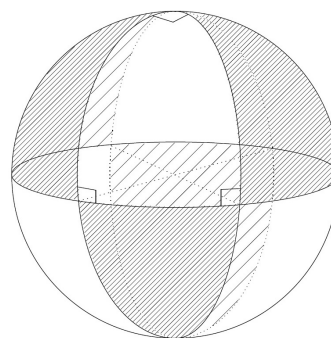
左のダイアグラムと対応する三角形の鏡映による敷き詰めは、対応するコクセター群の要素が偶数の長さか奇数の長さかで2色で色分けできる

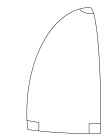
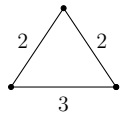
エッシャーの絵の「天使」と「悪魔」



$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} > \pi$$

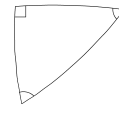
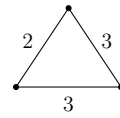
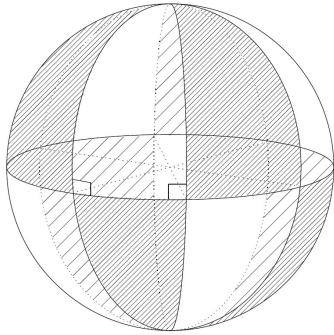
曲率 > 0





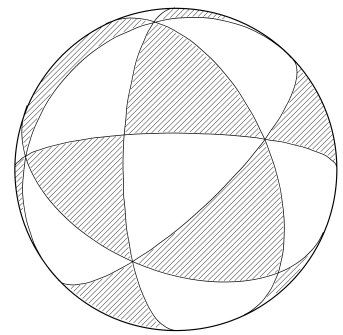
$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} > \pi$$

曲率 > 0



$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} > \pi$$

曲率 > 0

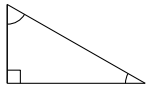
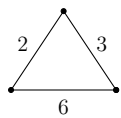


2024/5/23

43 / 52

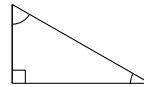
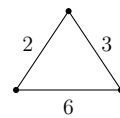
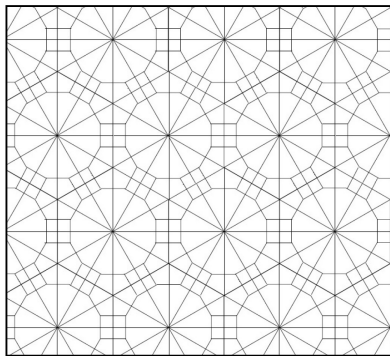
2024/5/23

44 / 52



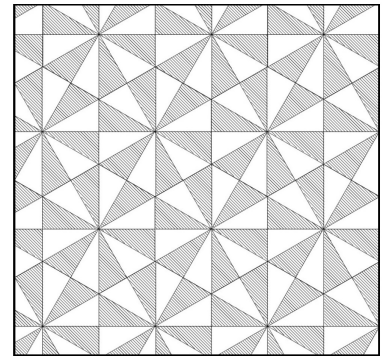
$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \pi$$

曲率 = 0



$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \pi$$

曲率 = 0

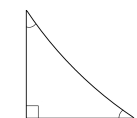
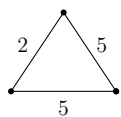


2024/5/23

45 / 52

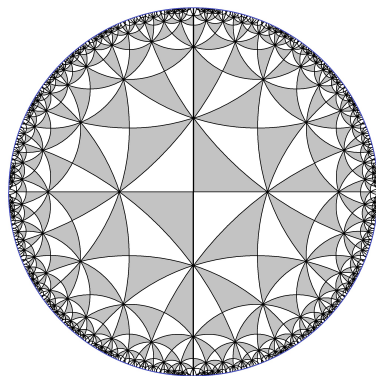
2024/5/23

46 / 52

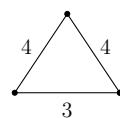


$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{5} < \pi$$

曲率 < 0

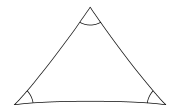


M.C. エッシャーの絵「円の極限 IV 天国と地獄」は
下図のようなダイアグラムと対応する三角形の
負の曲率の双曲平面での鏡映による敷き詰め
として描かれている。
また「天使」と「悪魔」の2つが交互に配置できる
理由は、コクセター群と関わりがある。



$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} < \pi$$

曲率 < 0



2024/5/23

47 / 52

2024/5/23

48 / 52

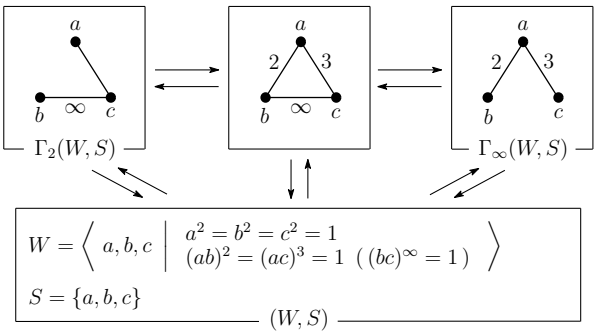
最後に、コクセター群の未解決な問題について

- ・ 3 次のコクセター系については、ここまで見てきたようにして、分類ができる。
- ・ 有限のコクセター群（有限鏡映群）については Coxeter 自身によってすべての分類がなされている。
- ・ 一方で、無限のコクセター群の分類の問題（同型問題）は現時点で、まだ未解決。

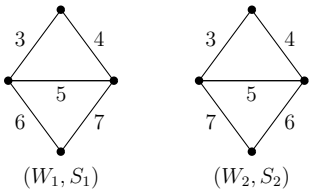
コクセター群の同型問題

- (1) 与えられた 2 つのコクセター群は同型か否かを (2 つのコクセター系の形から) 判定せよ。
- (2) 与えられたコクセター群を持つコクセター系をすべて求めよ。

ダイアグラムとコクセター系を次のように対応させて考える。



たとえば、近年、「ツイスト」という操作でコクセター群は同型だが異なるコクセター系をつくる方法が発見された。
N.Brady, J.P.McCammond, B.Mühlherr, W.D.Neumann (2002)



この 2 つのコクセター系は異なる形をしているが、
コクセター群 W_1 と W_2 は代数的には同じ形をしている。
…… このような形 (ツイスト) ですべて分類できるか？

ご清聴ありがとうございました。

