静岡大学大学院総合科学技術研究科

修士課程・理学専攻・数学コース

２０２４年度入学試験問題

２次募集

専門（数学）

注意事項：

$\boxed{\text{E}}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ すべてに解答せよ．
なお解答用紙は問題ごとに別にし，各用紙に問題番号を明記せよ．
紙面が不足した場合は解答用紙の裏面を使用してもよい．

$\boxed{\mathrm{E}}$ 次の命題の証明を英語で書け．ただし，論理記号（$\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$ など）を使わないこと．

(1) 連続写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ と定数 α に対して，αf も連続写像である．

(2) X と Y を集合とし，f を X から Y への写像とする．Y の部分集合 A と B に対して，$f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$ が成り立つ．

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ．

(1) f を有界閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数とする．$[a,b]$ 内のある点 c が存在して，$x \neq c$ となる任意の x について $f(x) \neq f(c)$ であるとする．$[a,b]$ 内の点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$ であるとする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = c$ となることを示せ．

(2) $a_n = \dfrac{1}{(n+1)\log(n+1)}$ として数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ を定める．x を実数とする．このとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ が収束するような x の範囲を求めよ．

(3) $x^2 + xy + y^2 = 1$ という条件のもとでの関数 $f(x,y) = 5x + 4y$ の最大値を求めよ．

(4) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$ とする．
このとき，重積分 $\displaystyle\iint_D (3x+1)\sqrt{y^3+y^2+1}\, dxdy$ の値を求めよ．

$\boxed{2}$ V を $\mathbb{R}$ 上の m 次元ベクトル空間, W を $\mathbb{R}$ 上の n 次元ベクトル空間, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ を V の基底, $\mathrm{Hom}(V, W)$ を V から W への線形写像全体の集合とする. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ が V の基底であることの正確な定義をかけ.

(2) 写像 $f : V \to W$ が線形写像であることの正確な定義をかけ.

(3) 線形写像 $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ に対して, もし

$$f(\boldsymbol{v}_i) = g(\boldsymbol{v}_i),\ i = 1, \ldots, m$$

が成り立つならば, $f = g$ であることを示せ.

(4) 勝手な m 個のベクトル $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m \in W$ に対して,

$$f(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{y}_i,\ i = 1, \ldots, m$$

を満たす線形写像 $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ が存在することを示せ.

(5) $\mathrm{Hom}(V, W)$ は

$$(\lambda f + \mu g)(\boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x}) + \mu g(\boldsymbol{x}),$$
$$\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ f, g \in \mathrm{Hom}(V, W),\ \boldsymbol{x} \in V$$

と定義することで $\mathbb{R}$ 上ベクトル空間となる. このことを用いて, $\mathrm{Hom}(V, W)$ の $\mathbb{R}$ 上ベクトル空間としての次元を求めよ.

(6) $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ と V は $\mathbb{R}$ 上ベクトル空間として同型であることを示せ.

$\boxed{3}$ X と Y を位相空間とする. 次の各問に答えよ.

(1) X がコンパクトのとき, X の閉集合はコンパクトになることを示せ.

(2) Y がハウスドルフのとき, Y のコンパクトな部分集合は Y の閉集合になることを示せ.

(3) X をコンパクト, Y をハウスドルフとする. このとき, 全単射な連続写像 $f : X \to Y$ は同相写像になることを示せ.

(4) X はコンパクトで, Y はハウスドルフでないとき, 全単射な連続写像 $f : X \to Y$ が同相写像にならない例を与えよ.

(5) Y はハウスドルフで, X はコンパクトでないとき, 全単射な連続写像 $f : X \to Y$ が同相写像にならない例を与えよ.