

2024 年度
静岡大学大学院総合科学技術研究科
修士課程・理学専攻・物理学コース
一般入試

専門(物理学)

< 注意事項 >

1. 問題は【1】～【3】の3問であり、配点は各問題に記載されている。
2. 解答用紙は問題ごとに別にし、それぞれに受験番号と問題番号を記入せよ。
裏面を使用しても良い。【3】については、(1)と(2)は「解答用紙その1」に解答し、
(3)は「解答用紙その2」に解答せよ。
3. 解答には途中の導き方を示すこと。

問題訂正

試験科目 物理学コース専門科目

問題番号 【3】 (1) (e)

訂正箇所

〔誤〕

(e) 前問(c)と(d)の結果を利用して、次の関係が成り立つことを示せ。

$$\hat{S}_x \hat{S}_y - \hat{S}_y \hat{S}_z = i\hbar \hat{S}_z$$

〔正〕

(e) 前問(c)と(d)の結果を利用して、次の関係が成り立つことを示せ。

$$\hat{S}_x \hat{S}_y - \hat{S}_y \hat{S}_x = i\hbar \hat{S}_z$$

【1】 真空の透磁率を μ_0 とし以下の問題に答えよ。ただし円柱座標系とその単位ベクトルを図1のようにとる。(配点 34%)

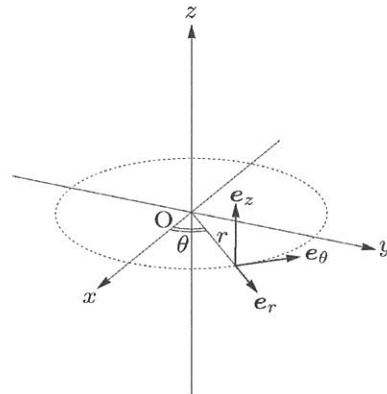


図1

(1) 図2のように真空中に厚さの無視できる中空の円板 A が座標原点 O を中心として xy 面に置かれている。中空円板 A の内側と外側の半径はそれぞれ a_1 および a_2 とする。この中空円板 A を一様に面電荷密度 σ_a で帯電させ、 z 軸を中心に θ の正の向きに角速度 ω_a で回転させる。帯電させた電荷は中空円板 A に固定されているものとする。また $\omega_a \geq 0$, $\sigma_a \geq 0$ とする。

(a) この中空円板 A について、図2の破線で示す微小幅 Δr を持つ半径 r の円環部分に注目する。この微小幅の円環が回転することによって生じる電流の大きさを σ_a , ω_a , r , Δr を使って表しなさい。ただし、 $\Delta r \ll r$ とする。

(b) 中空円板 A 全体の角速度 ω_a の回転によって生じる電流の大きさを a_1 , a_2 , σ_a , ω_a を使って表しなさい。

(c) (a) で考えた微小幅の円環が原点 O に作る磁場ベクトルをビオ・サバールの法則から導出し、 μ_0 , ω_a , σ_a , Δr と円柱座標系の単位ベクトルを使って表しなさい。

(d) 中空円板 A 全体が原点 O に作る磁場ベクトルが次のように表せることを示しなさい。

$$B = \frac{1}{2}\mu_0(a_2 - a_1)\omega_a\sigma_a e_z$$

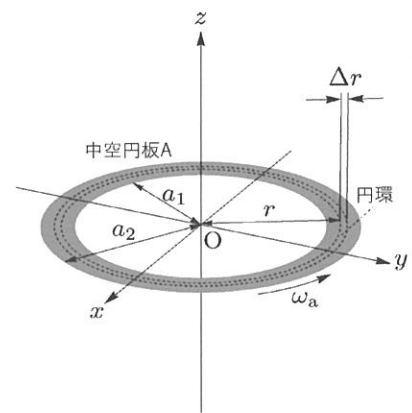


図2

(2) 図3のように問題(1)の状態の中空円板Aの内側に、質量 M で半径 b の密度が一様な厚さの無視できる円板Bを座標原点を中心として xy 面に静止させて置く. 円板Bは一様に面電荷密度 σ_b で帯電させるものとし、帯電させた電荷は円板Bに固定されているものとする. また $b \ll a_1$ とし、円板B内で中空円板Aが作る磁場の空間依存性は無視できるものとする. また $\dot{\omega}_a = d\omega_a/dt$ は正の一定値をとり、回転が加速するものとする. また円板Bが回転する場合、円板Bによる電流が作る磁場は無視できるものとする.

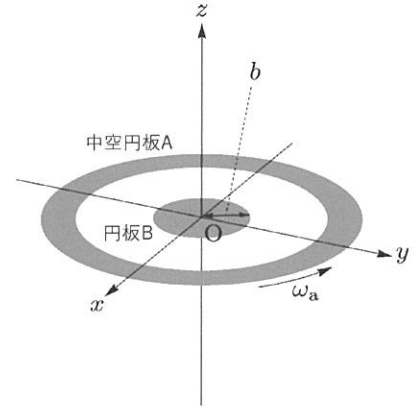


図3

- (a) ω_a に時間依存性があるので、中空円板Aが原点に作る磁場も時間変化し、円板Bに起電力を発生させることになる. 円板B上の原点を中心とする半径 r の円周上で生じる起電力の大きさを μ_0 , a_1 , a_2 , $\dot{\omega}_a$, σ_a , r を使って表しなさい.
- (b) この起電力によって円板B上の半径 r の円周上で生じる電場ベクトルを μ_0 , a_1 , a_2 , $\dot{\omega}_a$, σ_a , r と円柱座標系の単位ベクトルを使って表しなさい.
- (c) 円板Bの z 軸周りの回転角を θ_b , 円板Bの z 軸周りの慣性モーメントを I_B , 円板Bにはたらく力のモーメントの z 成分を N_z とするとき、 z 軸周りの回転の運動方程式を記述しなさい.
- (d) 電場が円板B全体にもたらす力のモーメントの z 成分 N_z を μ_0 , a_1 , a_2 , $\dot{\omega}_a$, σ_a , σ_b , b を使って表しなさい.
- (e) 円板Bの z 軸周りの慣性モーメント I_B を M , b を使って表しなさい.
- (f) 円板Bの角速度を ω_b とする. 時刻 $t = 0$ で $\omega_a = \omega_b = 0$ とするとき、 $t > 0$ における任意の時刻での角速度の比 ω_b/ω_a を μ_0 , a_1 , a_2 , M , σ_a , σ_b , b を使って表しなさい.

【2】ボルツマン定数を k_B 、プランク定数を h とする。以下の問題に答えよ。(配点 33%)

(1) 体積 V の容器の中に、質量 m の見分けのつかない単原子分子 N 個からなる理想気体が、温度 T の熱平衡状態にある。ただし N は十分に大きな整数とする。

- (a) 分子 1 個の分配関数が $Z_1 = V \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}$ となることを示せ。その際にプランク定数 h が表れる理由を簡潔に説明せよ。
- (b) 分子 N 個での分配関数 Z を求めよ。
- (c) ヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ。
- (d) 自由エネルギー F から理想気体の状態方程式を求めよ。
- (e) 化学ポテンシャル μ を求めよ。

(2) 固体表面に分子を 1 個だけ吸着できるサイトが n_0 個ある。吸着の状態は 1 状態しかなく、サイトへの吸着により分子のエネルギーは $-\varepsilon$ となる。ただし $\varepsilon > 0$ とする。固体表面が化学ポテンシャル μ を持つ単原子分子理想気体と接触している。理想気体の分子はサイトに吸着したり、外れたりして、温度 T の熱平衡状態にある。

- (a) n_0 個のサイトに n 個の気体分子が吸着するときの場合の数を求めよ。ただし $n_0 \geq n$ とする。
- (b) 大分配関数 Z_G を求めよ。
- (c) 吸着分子の数 n の期待値 \bar{n} を求めよ。
- (d) 問題(1)(e)で求めた化学ポテンシャル μ を用いて、吸着分子数の期待値 \bar{n} を圧力 p と温度 T の関数にせよ。
- (e) 温度一定で圧力を変化させたとき、吸着分子数の期待値 \bar{n} はどうか、理由とともに述べよ。同様に、圧力一定で温度を変化させたときについても述べよ。

必要があれば下記の式を使ってよい。ただし解答にそれぞれの式を使ったことを明記せよ。
スターリングの公式 (ただし N は十分に大きな整数とする)

$$\log N! \approx N \log N - N$$

二項定理

$$(a + b)^N = \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} a^n b^{N-n}$$

ガウス関数の積分 (ただし $a > 0$ とする)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

【3】 プランク定数を h 、それを 2π で割ったものを $\hbar = h/(2\pi)$ とし、以下の問題に答えよ。ただし、問題 (1) と問題 (2) は「解答用紙その 1」に解答し、問題 (3) は「解答用紙その 2」に解答せよ。(配点 33%)

スピンの大きさ $S = 1/2$ のスピン演算子について、 z 成分の演算子 \hat{S}_z の固有状態を、状態ケットで $|+\rangle$ と $|-\rangle$ で表す。状態 $|+\rangle$ と $|-\rangle$ にスピン演算子を作用させると、状態は以下のように変化する。

$$\begin{aligned}\hat{S}_z|+\rangle &= \frac{\hbar}{2}|+\rangle & \hat{S}_z|-\rangle &= -\frac{\hbar}{2}|-\rangle \\ \hat{S}_+|-\rangle &= \hbar|+\rangle & \hat{S}_+|+\rangle &= 0 \\ \hat{S}_-|+\rangle &= \hbar|-\rangle & \hat{S}_-|-\rangle &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

ここで、 $\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$ であり、 \hat{S}_x と \hat{S}_y はスピン演算子の x 成分と y 成分である。 $|+\rangle$ と $|-\rangle$ は正規直交化されており、 $\langle +|+\rangle = \langle -|-\rangle = 1$ 、 $\langle +|-\rangle = \langle -|+\rangle = 0$ を満たす。この 2 状態を用いて、任意の状態ケット $|\psi\rangle$ を次のように表す。

$$|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle\tag{2}$$

ここで、 a と b は複素数である。ケットベクトル $|\psi\rangle$ をブラベクトルにする場合、次のようになる。

$$\langle\psi| = a^*\langle +| + b^*\langle -|\tag{3}$$

(1) スピン演算子

(a) (1) 式を利用して、スピン演算子に対する次の行列要素を求めよ。

$$\begin{aligned}\langle +|\hat{S}_z|+\rangle, \langle +|\hat{S}_z|-\rangle, \langle -|\hat{S}_z|+\rangle, \langle -|\hat{S}_z|-\rangle \\ \langle +|\hat{S}_+|+\rangle, \langle +|\hat{S}_+|-\rangle, \langle -|\hat{S}_+|+\rangle, \langle -|\hat{S}_+|-\rangle \\ \langle +|\hat{S}_-|+\rangle, \langle +|\hat{S}_-|-\rangle, \langle -|\hat{S}_-|+\rangle, \langle -|\hat{S}_-|-\rangle\end{aligned}$$

(b) 恒等演算子 \hat{I} は、任意の状態に作用しても元の状態に戻る性質を持つ。この恒等演算子は次のように表される。

$$\hat{I} = |+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|\tag{4}$$

(4) 式の \hat{I} を (2) 式の $|\psi\rangle$ に作用させることで、 \hat{I} が恒等演算子であることを確認せよ。

(c) $|+\rangle$ と $|-\rangle$ およびそれらのブラを用いて \hat{S}_z 演算子を表現すると、次の結果が得られることを示せ。

$$\begin{aligned}\hat{S}_z &= \hat{I}\hat{S}_z\hat{I} \\ &= \frac{\hbar}{2}|+\rangle\langle +| - \frac{\hbar}{2}|-\rangle\langle -|\end{aligned}\tag{5}$$

ただし、(5) 式を導く際に問題 (1)(a) の結果を利用してよい。

(d) $\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$ を利用して、 \hat{S}_x 演算子についても、前問 (c) の \hat{S}_z と同様に計算して、 $|+\rangle$ と $|-\rangle$ とそれらのブラを用いて表せ。次に、 \hat{S}_y 演算子についても同様に表せ。

(e) 前問 (c) と (d) の結果を利用して、次の関係が成り立つことを示せ。

$$\hat{S}_x\hat{S}_y - \hat{S}_y\hat{S}_x = i\hbar\hat{S}_z\tag{6}$$

(2) 傾いたスピンの状態

スピン演算子のベクトルを $\hat{\mathbf{S}}$ と表す。 x, y, z 方向の単位ベクトルを、それぞれ $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ とすると、スピン演算子の各方向成分は、 $\hat{S}_x = \mathbf{e}_x \cdot \hat{\mathbf{S}}$ 、 $\hat{S}_y = \mathbf{e}_y \cdot \hat{\mathbf{S}}$ 、 $\hat{S}_z = \mathbf{e}_z \cdot \hat{\mathbf{S}}$ と表される。同様に、 θ と ϕ を実数として、一般的な方向を向く単位ベクトルを $\mathbf{n} = \sin\theta \cos\phi \mathbf{e}_x + \sin\theta \sin\phi \mathbf{e}_y + \cos\theta \mathbf{e}_z$ とすると、スピン演算子の \mathbf{n} 方向成分は $\hat{S}_n = \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{S}}$ と表される。

(a) 次の状態を導入する。

$$|\theta, \phi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} |-\rangle \quad (7)$$

$|\theta, \phi\rangle$ は \hat{S}_n の固有状態であることを示し、その固有値を求めよ。

(b) (7) 式の $|\theta, \phi\rangle$ を用いて、スピン演算子の期待値 $\langle \theta, \phi | \hat{S}_x | \theta, \phi \rangle$, $\langle \theta, \phi | \hat{S}_y | \theta, \phi \rangle$, $\langle \theta, \phi | \hat{S}_z | \theta, \phi \rangle$ を計算せよ。

(c) 前問 (a) と (b) の結果から、 $|\theta, \phi\rangle$ は、スピンの方向が \mathbf{n} の方向を向いた状態を表していることを説明せよ。

(3) スピン状態の時間変化

スピンに空間的に一様で時間依存性のない磁束密度を加えた場合、ハミルトニアンは $\hat{\mathcal{H}} = (g\mu_B/\hbar)\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{S}}$ で与えられる (これはゼーマン相互作用と呼ばれている)。ここで、 g は g 因子、 μ_B はボーア磁子と呼ばれる定数であり、 \mathbf{B} は磁束密度である。スピンに対して、大きさ B の磁束密度を z 方向に加えると、ハミルトニアンは次のようになる。

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{g\mu_B B}{\hbar} \hat{S}_z \quad (8)$$

(a) 時刻 t における状態ケットを $|\psi(t)\rangle$ とすると、時間に依存する Schrödinger 方程式は

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{H}} |\psi(t)\rangle \quad (9)$$

である。時刻 $t=0$ の状態 $|\psi(0)\rangle$ を用いて、時刻 t の状態は

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}} t} |\psi(0)\rangle \quad (10)$$

と表せることを示せ。ここで、 $e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}} t}$ は指数関数の変数に演算子が含まれるため、テイラー展開を用いて

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}} t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}} t \right)^n \quad (11)$$

と定義されている。

(b) 時刻 $t=0$ において、 $|\psi(0)\rangle = |\theta, \phi\rangle$ であるとする。ここで、 $|\theta, \phi\rangle$ は (7) 式で定義されている状態である。ハミルトニアンが (8) 式の $\hat{\mathcal{H}}$ である場合、時刻 t における状態 $|\psi(t)\rangle$ を求めよ。

(c) 前問 (b) の状態 $|\psi(t)\rangle$ を用いて、スピン演算子の期待値 $\langle \psi(t) | \hat{S}_x | \psi(t) \rangle$, $\langle \psi(t) | \hat{S}_y | \psi(t) \rangle$, $\langle \psi(t) | \hat{S}_z | \psi(t) \rangle$ を計算せよ。

(d) 前問 (b) と (c) の結果から、磁束密度を加えることにより、スピンはどのような運動をするか説明せよ。

(e) 滑らかな机の上を高速で回転しているコマがある。コマの回転軸が鉛直方向から傾いた場合、コマはどのような運動をするか答えよ。次に、コマの運動と磁場中のスピンの運動を比較して議論せよ。