静岡大学大学院総合科学技術研究科

修士課程・理学専攻・数学コース

２０２４年度入学試験問題

専　門（数　学）

注意事項：

$\boxed{\text{E}}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ のすべてに解答せよ.
なお解答用紙は問題ごとに別にし, 各用紙に問題番号を明記せよ.
紙面が不足した場合は解答用紙の裏面を使用してもよい.

$\boxed{\mathrm{E}}$ 次の命題の証明を英語で書け. ただし, 論理記号 ($\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$ など) を使わないこと.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$ と $\{b_n\}_{n=1,2,\cdots}$ がコーシー列（基本列）であるとき,
数列 $\{a_n + b_n\}_{n=1,2,\cdots}$ もコーシー列である.

(2) 集合 X と Y に対して, $X \cup Y = X \cap Y$ ならば $X = Y$ が成り立つ.

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ.

(1) f は有界閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数であり, $f(a) < 0 < f(b)$ を満たすとし, $A = \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}$ とする. このとき, 集合 A の上限 c が存在すること, さらに, c は $c \in (a,b)$ かつ $f(c) = 0$ を満たすことを示せ.

(2) 有界閉区間 $[a,b]$ 上の単調増加関数 f はリーマン積分可能であることを示せ.

(3) $x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + 2yz - zx + 7 = 0$ により定まる陰関数 $z = f(x,y)$ の極値を求めよ.

(4) f を有界閉区間 $[0,1]$ 上の C^1 級関数とする. このとき, 次の式が成り立つことを示せ.

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f'(x^2+y^2)\,dxdy = \pi(f(1) - f(0))$$

$\boxed{2}$　複素数成分の $m \times n$ 行列 $X = (x_{ij})$ に対し, X^* で, $\overline{x_{ji}}$ を (i,j) 成分とする行列を表わす. すなわち $X^* := {}^t(\overline{X})$ とする.

複素正方行列 A がエルミート行列とは, $A^* = A$ なるときにいう. また, 複素正方行列 U がユニタリ行列とは $U^*U = UU^* = E$ なるときにいう.

$(\cdot,\cdot)\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \boldsymbol{y}^*\boldsymbol{x}$ で定める. すると, $(\cdot,\cdot)$ は $\mathbb{C}^n$ のエルミート内積となる (標準的エルミート内積). また, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ に対し $\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ と定める. $\|\boldsymbol{x}\| \in \mathbb{R}$ であることを注意しておく.

A を n 次エルミート行列とするとき, 次の各問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ に対し $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ であることを示せ.

(2) A の固有値はすべて実数であることを示せ.

(3) A の固有値の最小値を α, 最大値を β とするとき, 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して

$$(\star) \qquad \alpha \leq \frac{(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|^2} \leq \beta$$

が成り立つ. さらに, 左の不等号について等号成立は, $\boldsymbol{x}$ が A の固有値 α に属する固有ベクトルであるときに限り, 右の不等号について等号成立は, $\boldsymbol{x}$ が A の固有値 β に属する固有ベクトルであるときに限る.

このことを次の手順で示せ.

(a) エルミート行列がユニタリ行列で対角化可能であることを用いて $(\star)$ を示せ.

(b) $(\star)$ の左の不等号の等号成立に関する主張を示せ. (右の不等号の等号成立に関する主張の証明は, 同様なので不要.)

(4) $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 4yz + 2xz$ $((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$ の条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ のもとでの最大値・最小値を求めよ. さらに, それを与える $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ.

$\boxed{3}$ 位相空間 X の部分集合 A について, A の閉包が X となるとき, A は X において稠密であるという.

位相空間 X, Y について, 次の各問に答えよ.

(1) X の部分空間 X_1, X_2 について, $X = X_1 \cup X_2$ かつ A_i は X_i の稠密な部分集合 $(i = 1, 2)$ のとき, $A_1 \cup A_2$ は X において稠密となることを示せ.

(2) X の 2 つの稠密な部分集合 A, B について, $A \cap B$ は X において稠密とは限らないことを示せ.

(3) X の稠密な部分集合 A と Y の稠密な部分集合 B について, 積空間 $X \times Y$ において $A \times B$ は稠密となることを示せ.

(4) 全射連続写像 $f : X \to Y$ について, A が X の稠密な部分集合のとき $f(A)$ は Y において稠密となることを示せ.

(5) 開写像 $f : X \to Y$ について, B が Y の稠密な部分集合のとき $f^{-1}(B)$ は X において稠密となることを示せ.