

連続体仮説と選択公理

静岡大学理学部

依岡輝幸

サイエンスカフェ in 静岡 第 166 話

2023 年 7 月 27 日

「もっと昔から話さないと、わかってもらえないかもしれないな」

「だったら、もっと昔から」

「長くなりますよ、かなり」

結構、といって草薙は両手を軽く広げた。

「さあ、どうぞ」

— 東野圭吾 『沈黙のパレード』

序章 デデキント

数学において根源的な問題は、ものの個数を「数えること」と、さまざまな図形の面積・体積を「測ること」であった。また、「定理」を導く「証明」も誕生した。タレス（紀元前 624～546 年頃）、ピタゴラス（紀元前 582～507 年頃）、ユークリッド（紀元前 3 世紀頃）、アリストテレス（紀元前 384～233 年頃）、アルキメデス（紀元前 287～212 年）。

中世になってから、物体の動きを数式で表すことが考えられるようになった。特に、ニュートンの微積分学は「極限」という考え方を導入した。ケプラー（1571 年～1630 年）、デカルト（1596 年～1650 年）、ニュートン（1643 年～1727 年）。

これ以降、数学と科学が並行して爆発的に発展を続けた。オイラー（1707 年～1783 年）、ガウス（1777 年～1855 年）。

しかし、「極限」を感覚に頼った考えに基づいていたため、間違った定理が生み出されてきた。それを復興するために、「極限」の厳密化がなされた。コーシー（1789 年～1857 年）、ワイエルシュトラス（1815 年～1897 年）。

リヒャルト・デデキント

(1831年10月6日～1916年2月12日)

チューリッヒ工科大学，ブラウンシュヴァイク工科大学で教授を歴任。

ドイツのゲッチンゲンにおいてガウスの指導のもと学位を取得した。ガウス最後の弟子と呼ばれているらしい。リーマンの学友である。

『連続性と無理数』(1872年)において実数論の基礎づけを，『数とは何か、何であるべきか』(1887年)において自然数論の基礎づけを与えた。

集合を数学の基礎概念に置くことをはじめた数学者で，環論を確立させた。

自然数（正の整数）は「ものの個数」を表す数である。

1 2 3 4 5 ...

整数は「ふたつの自然数の差」を表す数であり、

... -3 -2 -1 0 1 2 3 ...

有理数は「ふたつの整数の比」を表す数である。

... -1 $-\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{3}$ 0 $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ 1 ...

ふたつの有理数は大小比較ができて、どのふたつの異なる有理数 a と b ($a < b$) に対しても、その間に別の有理数（例えば $\frac{a+b}{2}$ ）がある。よって有理数を並べた模式図は下記のようなになる。

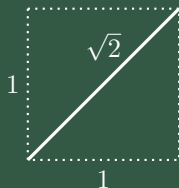
この有理数の模式図はびっしり点が詰まっているように見えるが、実はいたるところに隙間があってスカスカである。

例えば、 $\sqrt{2}$ は有理数ではない実数である。

$\sqrt{2}$ のどんなに近くにも有理数がある。

例えば、 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{4a_n}{a_n^2 + 2}$ を満たす有理数

列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $\sqrt{2}$ に収束する。

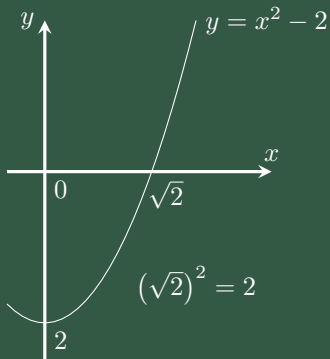


どの実数のどんな近くにも有理数が存在することを利用して、デデキントは $\sqrt{2}$ を次のような「ある有理数の集合」として定義することを思いついた。

$$\{x \in \mathbb{Q} : x < 0 \text{ または } x^2 < 2\}$$

$$\{x \in \mathbb{Q} : \text{ある } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } x < a_n \text{ が成り立つ}\}$$

\mathbb{Q}



例. $\left\{ x \in \mathbb{Q} : x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ を満たす自然数 } n \text{ がある} \right\}$,

ここは省略

$\left\{ x \in \mathbb{Q} : x < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ を満たす自然数 } n \text{ がある} \right\}$

のどちらも自然対数 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ を表す。

例. 円周率 π は $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$ を満たすから,

$\left\{ x \in \mathbb{Q} : \text{無限個の自然数 } n \text{ に対して } \frac{x}{4} < \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{2k-1} \text{ を満たす} \right\}$

は π を表す。

ひとつひとつの**実数**をある**有理数の集合**だと定義することにより、
離散と連続を結びつけた。

「諦めるな。過去の人間が考えついたことを、
若い君たちが理解できないなんてことはない。

一度諦めたら、諦め癖がつく。
解ける問題まで解けなくなるぞ」

— 東野圭吾 『禁断の魔術』

第1章 カントール

ゲオルク・カントール

(1845年3月3日～1918年1月6日)

ハレ大学の正教授。

三角級数の研究をきっかけに、点集合と超限帰納法・超限再帰の概念に辿り着き、集合の大きさを測るものさしとなる順序数と基数という概念を導入することにより、素朴集合論を確立させた。

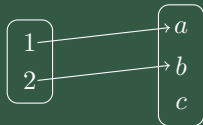
カントールが提唱した連続体仮説は集合論研究の原動力となり、今でも研究され続けている。

静 岡 を ク ラ フ ト ビ ー ル 大 国 に し よ う
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
こ の 文 は 十 六 文 字 以 下 で は 表 せ な い

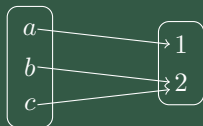
定義 (カントール). ふたつの集合 A と B が同数であるとは,
 A と B の間に漏れも重複もない対応 (全単射) が存在するときをいう。

例 (重複のない対応, 漏れのない対応). $A = \{1, 2\}$ とし, $B = \{a, b, c\}$ とする。

A から B への重複のない対応 (単射) は存在するが,
 A から B への漏れのない対応 (全射) は存在しない。



B から A への漏れのない対応 (全射) は存在するが,
 B から A への重複のない対応 (単射) は存在しない。



例。「自然数全部の集合 \mathbb{N} 」と「偶数全部の集合 E 」は同数である。

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|----|----|----|----|----|-----|------|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | ... | n | ... |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | ... | $2n$ | ... |

例。 \mathbb{N} と「整数全部の集合 \mathbb{Z} 」は同数である。

| | | | | | | | | |
|---|---|----|---|----|-----|------|--------|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... | $2n$ | $2n+1$ | ... |
| 0 | 1 | -1 | 2 | -2 | ... | n | $-n$ | ... |

例。 \mathbb{N} と $\mathbb{N}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}\}$ は同数である。

$n = 2^{k_0^n - 1} \cdot (2k_1^n - 1)$ と因数分解したとき、 n を (k_0^n, k_1^n) に対応させたものは全単射である。

例. \mathbb{N} と「有理数全部の集合 \mathbb{Q} 」は同数である。

「バラバラに並んでる点の集合 \mathbb{N} 」と「(隙間があるとはいえ) 直線にびっしり並んでいる点の集合 \mathbb{Q} 」は同数である。



例えば,

この証明は省略

$\xi : \mathbb{N} \rightarrow (\{0, 1\} \times \mathbb{Z})$, $\xi(m) = (\xi_0(m), \xi_1(m))$, を全単射とし,
 $\eta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ を $\eta(1) = 0$ を満たす全単射とし, p_k を k 番目の素数としたとき,

自然数 n の素因数分解 $\prod_{k=1}^l p_k^{m_k-1} = 2^{m_1-1} 3^{m_2-1} \dots p_l^{m_l-1}$ を

$$\left((-1)^{\xi_0(m_1)} p_1^{\xi_1(m_1)} \prod_{k=2}^l p_k^{\eta(m_k)} \right) - 1$$

に対応させると, これは全単射である。

例。「実数全部の集合 \mathbb{R} 」は「 \mathbb{N} の部分集合全部の集合 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 」と同数である。

ここで、集合 A が \mathbb{N} の部分集合であるとは、どの A の要素も \mathbb{N} の要素であるときを言う。

定理（カントール–ベンディクソン）. 集合 A から集合 B への重複のない対応（単射）が存在し、なおかつ B から A への重複のない対応（単射）が存在するならば、 A と B は同数である（ A と B の間に全単射が存在する）。

例の証明. ① ひとつひとつの実数は \mathbb{Q} の部分集合だと考えられ、 \mathbb{Q} と \mathbb{N} は同数であることから、 \mathbb{R} から $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ への単射が存在する。



② \mathbb{N} の部分集合 S に対して $\sum_{i \in S} 3^{-i}$ を対応させると、これは $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ から \mathbb{R} への

単射である（ $\sum_{i=1}^{\infty} 3^{-i} = \frac{1}{2} < 1$ だから）。

□

定理 (カントール). \mathbb{R} と $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \text{ かつ } y \in \mathbb{R}\}$ は同数である。

これを証明したカントール自身がデデキントへ宛てた手紙の中で「証明は理解するが、信じられない」と言っただらしい。

\mathbb{R} _____



証明. $\mathbb{R}^2 \approx (\mathcal{P}(\mathbb{N}))^2$

この証明は省略

$= \{(Y, Z) : Y \text{ と } Z \text{ はどちらも } \mathbb{N} \text{ の部分集合である}\}$

$\approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$ $\left\{ \begin{array}{l} Y \text{ の } k \text{ 番目の元を } y_k, \\ Z \text{ の } k \text{ 番目の元を } z_k \text{ としたとき,} \\ (Y, Z) \leftrightarrow \{x : x = 2y_k \text{ または } x = 2z_k + 1 \\ \text{となる } k \in \mathbb{N} \text{ が存在する}\} \\ \text{という対応は, 1 対 1 のもれのない対応である.} \end{array} \right.$

$\approx \mathbb{R}$



定理 (カントール, 1873 年 12 月 7 日). \mathbb{N} と \mathbb{R} は同数でない。

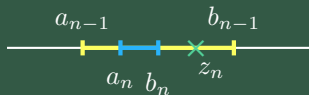
\mathbb{R} は \mathbb{N} を含んでいるが, \mathbb{N} と \mathbb{R} は同数ではない。このことは「 \mathbb{R} は \mathbb{N} より真に大きい集合である」ことを意味する。

\mathbb{N} と \mathbb{Q} は同数だったから, \mathbb{R} は \mathbb{Q} より真に大きい無限であることが分かる。有理数は数直線上にぎっしり詰まっているように思うが, 実はそこらじゅう穴だらけである。

証明. $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, \dots$ という, \mathbb{N} から \mathbb{R} への対応が与えられたとする。この対応には漏れがあることを証明する。

そのために, 次を満たす閉区間の列 $[a_n, b_n]$ を作る。

- $[a_n, b_n]$ は $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ に含まれる,
- $z_n \notin [a_n, b_n]$.



すべての $[a_n, b_n]$ の共通部分集合 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ に含まれる実数 (例えば

$\{x \in \mathbb{Q} : x < a_n \text{ を満たす } n \in \mathbb{N} \text{ が存在する}\}$ に対応する実数) はどの z_n とも異なる実数である。 □

定理. 集合 X から「 X の部分集合全部の集合 $\mathcal{P}(X)$ 」への漏れのない対応（全射）は存在しない。

つまり、 $\mathcal{P}(X)$ は X よりも真に大きい集合だと考えられる。
よって、いくらでも大きい無限集合が存在する。

証明. $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ とする。 f が全射でないことを示す。

この証明は省略

そのために、 $S = \{x \in X : x \notin f(x)\}$ と定義する。 $S \in \mathcal{P}(X)$ が成り立つ。

もし $f(x) = S$ ならば、 $x \in S$ もしくは $x \notin S$ のどちらかが成り立つけれども、

$x \in S$ ならば、 $x \notin S$ が成り立ち、矛盾し、

$x \notin S$ ならば、 $x \in S$ が成り立ち、矛盾する

ことから、 $f(x) = S$ を満たす $x \in X$ は存在しない。□

カントールは無限集合の階層を小さい順に並べることを着想した。

$$\begin{array}{cccccccc} \aleph_0 & \aleph_1 & \aleph_2 & \aleph_3 & \aleph_4 & \aleph_5 & \cdots \\ \mathbb{N} & & & & & & \end{array}$$

\mathbb{N} と同数の集合を**可算無限集合**と言い、

\mathbb{N} と同数でない無限集合を**非可算（不可算）**集合と言う。

定義（カントール, 1878）. **弱い連続体仮説**とは「どの \mathbb{R} の無限部分集合も \mathbb{N} もしくは \mathbb{R} のどちらかと同数である」ことを言い、**連続体仮説**とは「 \mathbb{R} は \aleph_1 の階層に属す」ことを言う。

\mathbb{R} は無限集合の大きさの階層

$$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \quad \aleph_3 \quad \aleph_4 \quad \aleph_5 \quad \cdots$$

のどこに入るのか。いま分かっていることは、「 \mathbb{N} と \mathbb{R} は同数でない」ことから、「 \mathbb{R} は \aleph_0 の階層には属さない」ことである。

昨日までは無罪だったものが、ある日突然有罪になる。
そんなものに振り回されちゃだめ。
何が正しいかは、自分で考えなきゃいけない。
わかった？

— 東野圭吾 『魔女と過ごした七日間』

第2章 ツェルメロ vs スコーレム

エルンスト・ツェルメロ

(1871年7月27日～1953年5月21日)

ゲッチンゲン大学，チューリヒ大学，フライブルク大学の教授を歴任。

はじめはベルリンでプランクの指導のもと物理学を研究していたが，1904年の第三回国際数学会議のケーニヒの講演で連続体問題を知ってから，集合論の研究に没頭した。

選択公理を導入し，整列可能定理を証明した。集合論の公理化にはじめて着手した。

カントールは無限集合の階層を小さい順に並べることを着想した。

$$\begin{array}{ccccccc} \aleph_0 & \aleph_1 & \aleph_2 & \aleph_3 & \cdots & & \\ & \aleph & & & & & \end{array}$$

定義 (カントール, 1878). **弱い連続体仮説**とは「 \mathbb{R} の無限部分集合は \aleph もしくは \aleph のどちらかと同数である」ことを言い、

連続体仮説とは「 \mathbb{R} は \aleph_1 の階層の集合である」ことを言う。

カントールは \aleph_* という階層を作ることではできたけれども、「どの集合もある \aleph_* の階層に属す」ことを示せなかった。もし「どの集合もある \aleph_* の階層に属す」ならば、弱い連続体仮説と連続体仮説は同値である。

ヒルベルトは 1900 年にパリで開催された第 2 回国際数学者会議において 20 世紀に取り組むべき問題を挙げており、その第 1 問題が「(弱い) 連続体仮説を証明せよ」であり、それに付随して「どの集合もある \aleph_* の階層に属すか」を問うている。

ツェルメロは「どの集合もある \aleph_* の階層に属すか」を解決するために **選択公理**を導入した。

定義（ツェルメロ）．選択公理とは「空でない集合からなる集合族 $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ に対して、 Λ から各 X_λ の元への対応が存在する」という主張である。

定理（ツェルメロ，1904年）．（選択公理を仮定すると）どの集合もある \aleph_* の階層に属す。

当時、無限の選択はひとつひとつ順番に選んでいくことが想定されていたが、ツェルメロの選択公理は無限の選択を同時にいっぺんに行うという考えの飛躍が見られた。そのため、選択公理は当時の数学者から強い批判を浴びた。特に当時の一大学派であったパリから強い批判を受けた。

定理（ヴィタリ，1905年）．選択公理を仮定すると、ルベグ測度で測れない実数の集合が存在する。

ツェルメロは選択公理の正当性を与えるために、集合論の公理化（集合論の形式化）を与えた。

集合論の公理化とは、**基盤とする形式論理と集合全体に関する前提条件（公理）**を与えることである。

ツェルメロの公理系では、例えば $\{\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})), \dots\}$ という集合の存在を示せそうになかったため、フランクелとスコーレムはそれぞれ独立に置換公理と呼ばれる公理を導入した。

フォン-ノイマンは所属関係に関する集合の階層を確立させるために基礎公理と呼ばれる公理を確立させた。

以上で、現在普及している集合論の公理系を構成する公理が出揃った。

- 外延性公理
- 対公理
- 和集合公理
- 冪集合公理
- 無限公理
- 基礎公理
- 分離公理 (条件 $\varphi(x)$ ごとにそれに対応した分離公理がある)
- 置換公理 (条件 $\varphi(x)$ ごとにそれに対応した置換公理がある)
- 選択公理

20世紀初頭から、数学のあらゆる分野が集合に基づいて定式化されるようになったことから、集合論の公理系は数学の公理系と捉える立場がある。

トアルフ・スコーレム

(1887年5月23日～1963年3月23日)

オスロ大学の教授。

はじめは物理学の研究をしていたが、ゲッチンゲンに留学して、ヒルベルトの弟子であるベルンシュタインとともに数理論理学の研究をしたことがきっかけで、数理論理学および集合論の研究に突入した。

当時、スカンジナビア半島で数理論理学の研究はスコーレム以外でなされておらず、大学での居心地が悪かったので、当時のスカンジナビア半島で伝統的に研究されていた代数学・数論の研究に邁進した。

ツェルメロは分離公理で導入した「明確 (definit)」性をより明確にするために、形式論理の改良を試みた。しかしツェルメロの方法ではうまくいきそうにないことを悟ったスコーレムは「一階述語論理」と呼ばれる、ツェルメロが使った形式論理よりも単純な形式論理で集合論を公理化することを提唱した。

ツェルメロはスコーレムの提唱に反対する形で、1930年自身の論文で集合論の公理系を定義し、それを自ら ZF 集合論 (Zermelo–Fraenkel 集合論) と呼んだ。ツェルメロの ZF 集合論は一階述語論理とは違う形式論理で定式化されており、選択公理は、公理ではなく、論理的演繹のひとつとして導入された。

そののち、1930年にゲーデルは一階述語論理の完全性定理を証明することで、一階述語論理は市民権を得て、どんどん普及していった。スコーレムの提唱は直ちに実現されていったわけではないが、徐々に浸透していった。1960年代以降には一階述語論理で形式化された集合論が大勢となり、現在ではこれが標準的な集合論の形式化となっている。

以下、ZF 集合論とは、選択公理を含まない集合論の公理系のこととし、選択公理を含む集合論の公理系を ZFC 集合論と呼ぶ。

「あの、どういうことなんですか」
「また一つ新しい発見をしたということです」
と湯川は答えた。

— 東野圭吾 『探偵ガリレオ』 「壊死る」

第3章 ゲーデル

クルト・ゲーデル

(1906年4月28日～1978年1月14日)

ウィーン大学の講師をしていたが、ナチス・ドイツから逃れるためにアメリカに移住し、のちにプリンストン高等研究所の教授に着任。プリンストンではアインシュタインと深い親交があったらしい。

1930年に不完全性定理を証明した。

1937年に連続体仮説と選択公理が（選択公理を持たない）集合論の公理系から反証できない（その否定を証明できない）ことを示した。

「ZF 集合論で命題 φ が証明できる」とは、「『ZF 集合論における命題 φ の形式的証明』と呼ばれる命題の有限列 $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ (ψ_n は φ と一致する) が存在する」ことである。

命題の有限列 $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ が形式的証明であるとは、各 ψ_i が次の条件のいずれかを満たすときを言う。

- ψ_i は ZF 集合論の公理である。
- ψ_i は論理的な公理である (例えば 「『 ρ かつ μ 』ならば ρ 」など)。
- ψ_i は 「 $\psi_j, j < i$, に含まれるある変数の一般化」である。
- ある $j, k < i$ に対して、 ψ_k は 「 ψ_j ならば ψ_i 」 という命題である (つまり、 「 ψ_j ならば ψ_i 」 と ψ_j から ψ_i を導く)。

集合論を公理化したことにより、「ZF 集合論で命題 φ が証明できる」ことが定義され、「『ZF 集合論で命題 φ が証明できない』ことを証明する」ことが何であるかが明確になった。

形式論理の特徴から、「ZF 集合論で『命題 φ の否定』が証明できない」と「ZF 集合論と φ が無矛盾である」ことは同値である。

ゲーデルの完全性定理から、「ZF 集合論と φ が無矛盾である」と「ZF 集合論と φ の両方を満たすモデルが存在する」ことは同値である。

ユークリッド幾何は座標空間というモデルを持つので無矛盾である。

ユークリッド幾何から平行線の公理を取り除き、平行線の公理の否定を加えた公理系も無矛盾である（非ユークリッド幾何がそれに当たる）。

よって、ZF 集合論と φ が無矛盾性であることを示すためには、ZF 集合論と φ を満たすモデルを構成すれば良い。

定理（ゲーデル、第二不完全性定理からの帰結、1931年）. ZF 集合論が無矛盾であることを ZF 集合論で証明できない。

つまり、ZF 集合論において ZF 集合論のモデルを構成できない。しかし、我々は ZF 集合論で φ が証明できるかどうかを知りたい。どうする？

1937年、ゲーデルは

- 「 x は構成可能集合である」ことを示す命題 $\mathcal{C}(x)$ を定義し、
- ZF 集合論のどの公理 ψ に対しても、ZF 集合論において「 $\mathcal{C}(x)$ を満たす x 全部の集まりは ψ を満たす」ことが証明できることと、
- ZF 集合論において「 $\mathcal{C}(x)$ を満たす x 全部の集まりは連続体仮説と選択公理を満たす」ことが証明できること

を示した。

つまり、「 $\mathcal{C}(x)$ を満たす x 全部の集まり」があたかも ZF 集合論のモデルであるかのように考えることができ、このことを利用して、次が証明された。

定理（ゲーデル、1937年）. ZF 集合論が無矛盾ならば、ZF 集合論に連続体仮説と選択公理を含めた公理系も無矛盾である。つまり、ZF 集合論が無矛盾ならば、ZF 集合論で連続体仮説の否定と選択公理の否定はそれぞれ証明できない。

その後、ゲーデルの構成可能集合を利用した集合論の研究が進展し、多くの無矛盾結果が生まれた。しかし、連続体仮説と選択公理がそれぞれ ZF 集合論で証明できるのかはこの時点でもまだ解決されていない。

「人力車だって、最初の一步がいちばん重いべ。
二歩目からは勢いがつく」

— 門井慶喜『銀河鉄道の父』

第4章 コーエンとその後

ポール・コーエン

(1934年4月2日～2007年3月23日)

スタンフォード大学教授。

シカゴで三角級数の研究において学位を取得したのち、リトルウッドの予想に関する研究でアメリカ数学会の賞を受賞した。

1963年、強制法という証明手法を開発し、連続体仮説の否定と選択公理の否定がZF集合論と無矛盾であること、つまり、ZF集合論から連続体仮説と選択公理がそれぞれ証明できないことを示した。この業績でフィールズ賞を受賞した。

ゲーデルは集合全体の世界の中で「構成可能な集合全体」という小さい世界を利用して、「ZF 集合論が無矛盾ならば、ZF 集合論に連続体仮説と選択公理を含めた公理系も無矛盾である」こと、つまり「ZF 集合論が無矛盾ならば、ZF 集合論で連続体仮説の否定と選択公理の否定はそれぞれ証明できない」ことを示した。

コーエンはその逆に、**集合の世界を拡大すること**で、

- 「ZF 集合論が無矛盾ならば、ZFC 集合論に連続体仮説の否定を含めた公理系も無矛盾である」こと
- 「ZF 集合論が無矛盾ならば、ZF 集合論に選択公理の否定を含めた公理系も無矛盾である」こと

を示すことを試みた。

元の世界

$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \quad \aleph_3 \quad \aleph_4 \quad \aleph_5 \quad \aleph_6 \quad \dots$
 \mathbb{R}

新しい実数を追加して拡大した世界

$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \quad \aleph_3 \quad \aleph_4 \quad \aleph_5 \quad \aleph_6 \quad \dots$
 \mathbb{R}

しかし、集合の世界を拡大すると、無限の階層のものさしに変化する可能性があるため、この方針は困難である。

「ふたつの集合が同数である」とは「ふたつの集合の間に漏れも重複もない対応（全単射）が存在する」ことだった。新しい実数を追加することにより新たな対応関係も同時に追加されることで、元の世界では同数でなかったふたつの集合が拡大した世界で同数になることがある。

元の世界

| | | | | | | | | | | | |
|--------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|---------------|-----|
| \aleph_0 | \aleph_1 | \aleph_2 | \aleph_3 | \aleph_4 | \aleph_5 | \aleph_6 | \aleph_7 | \aleph_8 | \aleph_9 | \aleph_{10} | ... |
| \mathbb{R} | | | | | | | | | | | |

新しい実数を追加して

拡大した世界

| | | | | | | | | | | | |
|--------------|------------|--|------------|------------|--|------------|--|--|--|--|-----|
| \aleph_0 | \aleph_1 | | \aleph_2 | \aleph_3 | | \aleph_4 | | | | | ... |
| \mathbb{R} | | | | | | | | | | | |

コーエンは \aleph_2 個の有限 2 進数列の拡大という半順序による強制法というモデルの拡大手法でこの困難を乗り越えた。

コーエンの証明はフェファーマンなどの同僚数学者に疑われた。そこでコーエンはゲーデルに会いに行き、証明を見せた。ゲーデルは数ページ見ただけで証明の正しさを認めたいらしい。このニュースが駆け巡り、コーエンのプレプリントは流布され、コーエンは各地の大学でセミナーをし、コーエンの証明は周知されていった。

別の半順序による強制法によって別の無矛盾結果が生まれるのではないかと考えた数学者が、それぞれの創意工夫により、それぞれの無矛盾結果を示した。

【参考文献】

- (第1章と第2章) 数理科学 2022年6月号 特集「集合・位相の考え方 数学の基礎をなす概念」連続体仮説と選択公理
- (第1章) 数学セミナー 2016年9月号 特集「私の選ぶとおきの数式」 連続体仮説

【推薦図書】

- デーデキント著, 河野伊三郎訳『数について』岩波書店。
- 竹内外史『新装版 集合とはなにか』ブルーバックス, 講談社。
- 藤田博司『「集合と位相」をなぜ学ぶのか』技術評論社。
- 藤田博司『魅了する無限』知りたい!サイエンス, 技術評論社。

