静岡大学大学院総合科学技術研究科

修士課程・理学専攻・数学コース

２０２３年度入学試験問題

２次募集

専門（数学）

注意事項：

$\boxed{\text{E}}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ すべてに解答せよ．
なお解答用紙は問題ごとに別にし，各用紙に問題番号を明記せよ．
紙面が不足した場合は解答用紙の裏面を使用してもよい．

$\boxed{\text{E}}$ 次の命題の証明を英語で書け．ただし，論理記号（$\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$ など）を使わないこと．

(1) f と g を実連続関数とする．このとき，合成関数 $f \circ g$ も連続である．

(2) X, Y を集合，B を Y の部分集合，f を X から Y への写像とする．このとき，$f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ が成り立つ．さらに，f が全射のとき，$f(f^{-1}(B)) = B$ が成り立つ．

$\boxed{1}$　次の各問に答えよ.

(1) $\{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$ を数列とし, α を実数とする. このとき, $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\alpha$ ならば, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\alpha$ が成り立つことを示せ.

(2) $\{f_n\}_{n=1,2,\cdots}$ を $\mathbb{R}$ で一様連続な関数列とする. $\{f_n\}_{n=1,2,\cdots}$ が関数 f に $\mathbb{R}$ で一様収束するならば, f は $\mathbb{R}$ で一様連続であることを示せ.

(3) $\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)=x^4-x^2y^2+y^4-x^2-y^2+1$ の極値を求めよ.

(4) f を $[0,1]$ で定義された連続関数, $D=\{(x,y):0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq x\}$ とする. 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\iint_D f(x-y)\,dxdy=\int_0^1(1-z)f(z)\,dz$$

$\boxed{2}$ A を n 次正方複素行列とする. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) 次の用語の意味を正確にかけ.

(i) 複素数 α は A の固有値である.

(ii) W_α は A の固有値 α に対する固有空間である.

(iii) $f_A(x)$ は A の固有多項式である.

(2) 複素数 α が A の固有値であるための必要十分条件は, α が A の固有方程式の根であることを示せ.

(3) P を n 次複素正則行列とするとき, A と $P^{-1}AP$ は同じ固有多項式をもつことを示せ.

(4) $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$ が上三角行列であるとき, A の固有値は $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ であることを示せ.

(5) m を自然数とする. A の固有値を $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ とするとき, $f_{A^m}(x)$ を求めよ. ただし, 任意の正方複素行列は上三角化可能であることは用いてもよい.

(6) $f_A(x)f_{-A}(x) = f_{A^2}(x^2)$ であることを示せ.

(7) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と, それに対する固有空間を求めよ.

$\boxed{3}$ 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ に通常の距離

$$d(x, y) = |x - y| \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

を定め, 距離空間とする. 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ と有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ を $\mathbb{R}$ の部分空間として考える. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) $\mathbb{Z}$ の任意の部分集合は $\mathbb{Z}$ の開集合になることを示せ.

(2) 任意の $x \in \mathbb{Q}$ に対して, 一点集合 $\{x\}$ は $\mathbb{Q}$ の開集合にならないことを示せ.

(3) $\mathbb{Q}$ から $\mathbb{Z}$ への連続写像で単射となるものは存在しないことを示せ.

(4) $x, y \in \mathbb{R}$ に対して, $x \sim_{\mathbb{Z}} y$ を $x - y \in \mathbb{Z}$ によって定める. このとき, $\mathbb{R}$ 上の関係 $\sim_{\mathbb{Z}}$ は同値関係で, 商空間 $\mathbb{R}/\sim_{\mathbb{Z}}$ はユークリッド平面上の単位円 S^1 と同相になることを示せ.

(5) $x, y \in \mathbb{R}$ に対して, $x \sim_{\mathbb{Q}} y$ を $x - y \in \mathbb{Q}$ によって定める. このとき, 商空間 $\mathbb{R}/\sim_{\mathbb{Q}}$ の一点集合は閉集合にならないことを示せ.