2023年度
静岡大学大学院総合科学技術研究科
修士課程・理学専攻・物理学コース
一般入試

専門(物理学)

＜注意事項＞

1. 問題は【1】〜【3】までの3問であり、配点は各問題に記載されている。

2. 解答用紙は問題ごとに別にし、それぞれに受験番号と問題番号を明記せよ。
   裏面を使用しても良い。

3. 解答には途中の導き方を示すこと。

【１】 以下の問いに答えよ。重力加速度の大きさを g、 真空の誘電率を ϵ_0 とする。任意の物理量 A に対して、その１回時間微分を $\dot{A}$ で、２回時間微分を $\ddot{A}$ で表す。(34%)

(1) 円柱座標 (r, θ, z) を図１のようにとる。質量 m の粒子が、保存力ポテンシャル $U(r, \theta, z)$ 中で

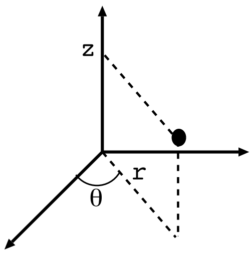


図１

運動するとき、そのラグランジアン L_0 は、次で与えられる。

$$L_0 = \frac{m}{2}\left((\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2 + (\dot{z})^2\right) - U(r, \theta, z)$$

U を用いて、(r, θ, z) の各方向のラグランジェの運動方程式をかけ。

(2) 一様な重力下で質量 m の粒子が図２のように逆さにした円錐の内側にそって運動している。粒子は円錐の表面から離れることはない。粒子の位置は円柱座標 (r, θ, z) で表す。　図２中に定義された α は時間に依存しないとして以下用いよ。

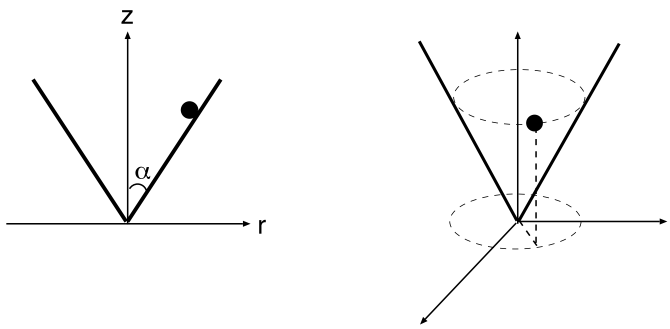


図２

(a) 粒子が円錐の表面にある、という拘束条件を $r = f(\theta, z)$ と表す。　拘束条件下でのラグランジアンおよびラグランジェの運動方程式は (1) の U を

$$U = U_{\text{重力}} + \lambda(r - f(\theta, z))$$

で置き換えれば良い。ただし $U_{\text{重力}}$ は一様重力ポテンシャルで、 $z = 0$ で $U_{\text{重力}} = 0$ とする。λ はラグランジェの未定乗数であり (r, θ, z) に関して定数として振る舞う。 $U_{\text{重力}}$ および $f(\theta, z)$ を具体的に代入したラグランジェの運動方程式を用いて、粒子が円錐面から受ける抗力の大きさ N_0 と λ との関係を求めよ。

(b) 拘束条件 $r = f(\theta, z)$ を用いて r 方向と z 方向の運動方程式から λ を消去して、r に関する運動方程式を求めよ (N_0 も用いてはいけない)。 ただし z 軸周りの角運動量を ℓ として θ も消去せよ。

(c) $r = r_0$ のとき粒子は円錐面にそって水平に円運動を行う。この r_0 から微小に r をずらし $r = r_0 + \epsilon_0$（ただし $|\epsilon_0/r_0| \ll 1$) とすると ϵ_0 の運動は単振動で表される。その振動数 ω_0 を求めよ。ただし ℓ を消去して r_0 を用いて表せ。

(3) 図 2 の円錐の中心軸を単位長さあたり $\sigma(> 0)$ で帯電させた。粒子はやはり円錐の表面から離れることはない。

(a) 粒子の位置にできる静電ポテンシャル（電位）ϕ を求めよ。ただしある正定数 a に対して $r = a$ で $\phi = 0$ とする。

(b) 粒子の電荷を $q(> 0)$ とする。　λ をラグランジェの未定乗数として用い、r 方向の運動方程式をかけ。ただし粒子の角運動量を (2) のときと同じ ℓ として θ は消去せよ。粒子が作る電磁場は無視せよ。

(c) $r = r_1$ のとき粒子は円錐面にそって水平に円運動を行う。この r_1 からの微小なズレ ϵ_1 はやはり単振動する。このときの振動数 ω_1 を ℓ を消去して r_1 を用いて表せ。ω_1 は (2) の ω_0 に比べて大きいか、小さいか？理由とともに述べよ

【2】　以下の問題に答えよ。ボルツマン定数を $k_{\rm B}$ とする。（配点 33%）

2 つの部分系 a, b からなる系（これを全系とよぶ）を考える。
部分系 a は区別可能な $N_{\rm a}$ $(\gg 1)$ 個の粒子からなる系である。各々の粒子は、ゼロ以上の整数 n で番号付けされる離散的な状態のみをとり、番号 n の状態のエネルギーは $n\varepsilon_{\rm a}$（ただし、$\varepsilon_{\rm a} > 0$）である。
部分系 b は区別可能な $N_{\rm b}$ $(\gg 1)$ 個の粒子からなる系である。各々の粒子は、ゼロ以上の整数 ℓ で番号付けされる離散的な状態のみをとり、番号 ℓ の状態のエネルギーは $\ell\varepsilon_{\rm b}$（ただし、$\varepsilon_{\rm b} > 0$）である。
このとき、部分系 a の 1 つのミクロ状態（微視的状態）は、個々の粒子がどの番号（ゼロ以上の整数）の状態にいるかを列挙した $(n_1, n_2, ..., n_{N_{\rm a}})$ によって指定できる。部分系 b の 1 つのミクロ状態も同様に、ゼロ以上の整数を列挙した $(\ell_1, \ell_2, ..., \ell_{N_{\rm b}})$ によって指定できる。そして全系の 1 つのミクロ状態は、これらを合わせた $(n_1, n_2, ..., n_{N_{\rm a}}, \ell_1, \ell_2, ..., \ell_{N_{\rm b}})$ によって指定できる。

この問題の前半では、全系が温度 T の熱平衡状態にあるとし、これをカノニカルアンサンブルで解析する。

(1) 全系の分配関数 Z を求めよ。

(2) 熱平衡状態での全系のエネルギー E を $T, N_{\rm a}, N_{\rm b}$ の関数として表せ。

(3) 熱容量 C を $T, N_{\rm a}, N_{\rm b}$ の関数として表せ。

(4) $\varepsilon_{\rm a} \ll \varepsilon_{\rm b}$ だとする。このとき、$\varepsilon_{\rm a} \ll k_{\rm B}T \ll \varepsilon_{\rm b}$ を満たす温度領域では熱容量はほぼ一定の値 C_1 となる。また、$\varepsilon_{\rm b} \ll k_{\rm B}T$ を満たす温度領域では熱容量は別の一定値 C_2 に近づく。問 (3) の結果をもとに C_1 および C_2 の表式を求めよ。

この問題の後半では、同じ状況をミクロカノニカルアンサンブルで解析する。以下では、問 (1) から問 (4) の結果を**用いずに**解答せよ。問 (5) から問 (7) までは部分系 a のみを考える。

(5) 部分系 a のミクロ状態のうち、そのエネルギーが $E_{\rm a} = M\varepsilon_{\rm a}$ に等しいミクロ状態の個数 $W_{\rm a}(E_{\rm a}, N_{\rm a})$ を求めよ。ただし、M はゼロ以上の整数である。この段階での結果の式は M を含んだものでよい。なぜその式で求まるのかの理由も書くこと。

(6) ボルツマンの原理を用いて、部分系 a のエントロピー $S_{\rm a}(E_{\rm a}, N_{\rm a})$ を $E_{\rm a}, N_{\rm a}$ の関数として表せ。最終結果には M を**含まない**ようにせよ。また、大きい整数 K について成り立つスターリングの公式 $\log K! \simeq K\log K - K$ を計算途中で用いよ。ただし、$E_{\rm a}$ の大きさのオーダーは $O(N_{\rm a})$ だとする。

(7) 部分系 a の温度 $T_{\rm a}$ を $E_{\rm a}, N_{\rm a}$ の関数として表せ。

(8) いま、全系の温度は T だとする。全系のエネルギー $E = E_{\rm a} + E_{\rm b}$ を $T, N_{\rm a}, N_{\rm b}$ の関数として表せ。

【3】 次の量子力学の問題に答えよ。(配点 33%)

(1) １次元を運動する質量 m の粒子について考える．この粒子はポテンシャル $U(x)$ 中を運動し，ハミルトニアンは次で与えられる．

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(x) \tag{1}$$

この粒子の波動関数はシュレディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x) = H\phi(t,x) \tag{2}$$

に従う．以下の問に答えよ．

(a) この系のエネルギーの期待値が保存することを示せ．

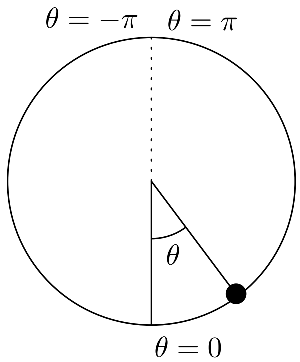
(b) この粒子の運動量の期待値が保存する条件を導け．

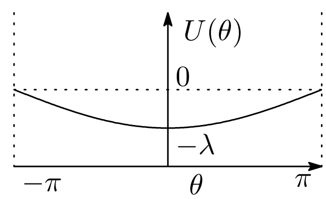
(c) ポテンシャルが $U(x) = U(-x)$ を満たすとき，このハミルトニアンに対するエネルギー固有関数が奇関数または偶関数となることを示せ．ただし，この系に縮退はないと仮定する．

(2) ある粒子が円周上を運動している．円周に沿ってポテンシャル U が存在し, 粒子のエネルギー固有関数は次のシュレディンガー方程式に従うとする．

$$E\phi(\theta) = (H_0 + U(\theta))\phi(\theta), \qquad H_0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}, \qquad U(\theta) = -\lambda\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \tag{3}$$

ここで θ は $-\pi \le \theta < \pi$ の範囲をとる．(左下図参照) また簡単のため粒子の質量を 1, 円の半径を 1, プランク定数 $\hbar = 1$ とした．$U(\theta)$ は右下図のようなポテンシャルで, λ はポテンシャルの強度を表す正の定数とする．以下では λ は小さい量として, λ に対する摂動論を用いてこの系を解析する．





(a) まず λ に関する摂動の 0 次を考える．この場合, $U(\theta)$ を無視できる．このとき系のエネルギー固有関数とエネルギー固有値を全て求よ．ただし, 固有関数は規格化すること．また波動関数は周期境界条件 $\phi(\theta + 2\pi) = \phi(\theta)$ を満たすとする．

(b) 摂動の 0 次で各エネルギー準位に縮退があるか答えよ．

(c) 次にエネルギーに対する λ の 1 次補正を求める．ポテンシャル $U(\theta)$ は $U(-\theta) = U(\theta)$ を満たすので, ハミルトニアン (3) のエネルギー固有関数は θ に関して奇関数または偶関数となると考えられる．そこで問 (a) で得た固有関数に対して次の操作を行え．

  i. 縮退がないエネルギー準位の固有関数は, 奇関数または偶関数のどちらかになっているはずである．縮退がないエネルギー準位毎に, 固有関数が奇関数か偶関数かを分類せよ．ただし全てのエネルギー準位が縮退している場合はこの操作はしなくて良い．

  ii. 縮退があるエネルギー準位では, 縮退している固有関数同士の適当な線形結合を取ることで, 新たに奇関数のエネルギー固有関数と偶関数のエネルギー固有関数をそれぞれ作れ．ただしエネルギー固有関数は規格化すること．なお, 問 (a) で得た固有関数がすでに奇関数と偶関数であった場合は, そのままの形で良い．また全てのエネルギー準位で縮退していなかった場合は, この操作はしなくて良い．

(d) 前問の操作で, 摂動の 0 次における全てのエネルギー固有関数は奇関数または偶関数となった．これらの固有関数を用いて摂動の 1 次におけるエネルギー固有値の補正を求めよ．

(e) 一次の摂動補正により, エネルギー準位がどのように変化したか概要を述べよ．