静岡大学大学院総合科学技術研究科

修士課程・理学専攻・数学コース

２０２３年度入学試験問題

専　門（数　学）

注意事項：

$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{E}$ のすべてに解答せよ.
なお解答用紙は問題ごとに別にし, 各用紙に問題番号を明記せよ.
紙面が不足した場合は解答用紙の裏面を使用してもよい.

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ.

(1) $\{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$ を数列とし, α を実数とする. このとき, $\{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$ のすべての部分列が α に収束する部分列を含むならば, 数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$ は α に収束することを背理法により証明せよ.

(2) f を区間 $[0,\infty)$ で定義された実数値連続関数とする. このとき, 極限 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ が存在するならば, f は $[0,\infty)$ で一様連続であることを示せ.

(3) 半径 1 の円に内接する三角形のうちで, 正三角形が面積最大であることを微分法を用いて示せ.

(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ を求めよ. ただし,

$$f(t) = t\int_{t^2}^{1} e^{-x^2}\,dx \quad (0 \leq t \leq 1)$$

とする.

$\boxed{2}$ A を $m \times n$ 実行列, $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義される線形写像とする.

(1) 次の用語の意味を正確にかけ.

(i) $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_s \in \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ を生成する.

(ii) $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_t \in \mathbb{R}^m$ は一次独立である.

(iii) T_A は線形写像である.

(2) $AB = E_m$ となる $n \times m$ 実行列 B が存在すると仮定する. ここで E_m は m 次単位行列である.

(i) $T_A \circ T_B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ は恒等写像であることを示せ.

(ii) $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_s \in \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ を生成するならば, $T_A(\boldsymbol{x}_1), \ldots, T_A(\boldsymbol{x}_s) \in \mathbb{R}^m$ は $\mathbb{R}^m$ を生成することを示せ.

(iii) $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_t \in \mathbb{R}^m$ が一次独立であるならば, $T_B(\boldsymbol{y}_1), \ldots, T_B(\boldsymbol{y}_t) \in \mathbb{R}^n$ は一次独立であることを示せ.

(iv) $m \leq n$ であることを示せ.

(3) C を m 次正方行列とするとき, 次の条件は同値であることを示せ.

(a) C は正則行列である.

(b) T_C は単射である.

(c) T_C は全射である.

$\boxed{3}$ 次の各問に答えよ.

(1) 位相空間 X のコンパクトな部分集合 A, B に対して $A \cup B$ はコンパクトであることを示せ.

(2) コンパクトな位相空間 X の閉部分集合族 $\{F_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ で, 任意の $i = 1, 2, \ldots$ について $F_i \neq \emptyset$ かつ $F_{i+1} \subset F_i$ をみたすとき, $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$ は空とならないことを示せ.

(3) 距離空間 X について, 次は同値になることを示せ.

(i) X はコンパクトである.

(ii) X の任意の点列 $\{x_i\}_{i=1,2,\ldots}$ は収束する部分列を持つ.

(4) 2 つのコンパクト距離空間 X, Y に対して, 積空間 $X \times Y$ はコンパクトであることを示せ.

$\boxed{\text{E}}$ 次の命題の証明を英語で書け．ただし，論理記号（$\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$ など）を使わないこと．

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$ が実数 α に収束し，数列 $\{b_n\}_{n=1,2,\cdots}$ が実数 β に収束するとき，数列 $\{a_n+b_n\}_{n=1,2,\cdots}$ は $\alpha+\beta$ に収束する．

(2) X, Y, Z を集合とし，f を X から Y への写像，g を Y から Z への写像とする．もし合成写像 $g\circ f$ が全単射ならば，f は単射であり，g は全射である．