サイエンスカフェin 静岡 Season 34

虚数の生み出す「玲瓏なる境地」

足立 真訓
(静岡大学理学部 / Universität zu Köln)

2022 年 4 月 28 日 (木) 18:00〜19:30 JST

- 玲瓏（れいろう）
  1. 玉 (ギョク) や金属が澄んだ音で鳴る様子.
  2. 玉のように, 美しく澄みきっている様子.
  - ニュートンが一見捕捉しがたいような天体の運動も簡単な重力の方則によって整然たる系統の下に一括される事を知った時には, 実際ヴォルテーアの謳ったように, 神の声と共に渾沌は消え, 闇の中に隠れた自然の奥底はその帷帳 (とばり) を開かれて, 玲瓏たる天界が目前に現われたようなものであったろう.
(寺田寅彦「科学者と芸術家」)〔1916 年〕

玲瓏 - ウィクショナリー日本語版
https://ja.wiktionary.org/wiki/玲瓏

- 我々は微分可能性によって解析関数を定義した．微分可能性は，約言すれば，z が z_0 に近づく経路に関係なく $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ の極限が一定であることを意味する．今同様に z_0 と z とを結ぶ通路に関係なく $\int_{z_0}^{z} f(z)dz$ が一定であることを（この場限り）かりに積分可能ということにしてみよう．然らばコーシーの定理は，複素変数の関数 $f(z)$ が微分可能ならば，積分可能であることを示し，またモレラの定理は，$f(z)$ が積分可能ならば，微分可能なることを示すものである．この意味において，複素数の世界では，微分可能も積分可能も同意語である．驚嘆すべき朗らかさ！コーシー及びそれに先立ってガウスが虚数積分に触れてから約百年を経て，我々はこの玲瓏な境地に達し得たのである．(『解析概論』岩波書店，1938 年初版)

高木貞治
(1875–1970)

Photo: Public domain, from Wikipedia.

数について

- チャットで随時質問を受け付けています! お気軽にどうぞ!
- 自然数：$1, 2, 3, 4, 28, 2022$ など．
  足し算，掛け算ができる: $1+2=3.\quad 4\times 7=28$
- 整数：自然数と「負の数」と 0 を合わせたもの
  引き算ができる: $1-1=0.\quad 4-7=-3.\quad 5-(-6)=11.$
- 有理数 ：いわゆる「分数」．$1/3, 2022/28$ など．
  循環小数で表せる: $1/3=0.333\ldots.\quad 1011/14=72.214285714\ldots$
  約分することができる: $2022/28=1011/14.$
- 実数：循環しない小数も含めた数．$\pi=3.14159265\ldots$,
  $e=2.718284590\ldots$ など．
  「ルート 2」$\sqrt{2}=1.41421356\ldots$：自乗してちょうど 2 となる正の数

虚数について

定理

どんな実数も自乗すると 0 以上になる.

証明. a を実数とする. $a = 0$ なら $a^2 = a \times a = 0$. $a > 0$ なら $a^2 > 0$ (正の数どうしの積は正). $a < 0$ なら $a^2 > 0$ (負の数どうしの積は正). (証明終)

逆に, 次が成り立つことが紀元前より認識されていた.

事実

どんな正の実数 x に対しても, 自乗がちょうど x となる正の数が存在する.
この数のことを「ルート x」と呼び, $\sqrt{x}$ で表す.

16 世紀イタリアで, 三次方程式の解の公式が研究され, 「虚数」が使われ始めた.

定義

自乗がちょうど -1 となる「数」を虚数単位と呼び, $\sqrt{-1}$ や i などで表す.

複素数について

レオンハルト・オイラー
(1707–1783)

- 虚数単位を用いて, 加減乗除で作られる数を複素数と呼ぶ.
- たとえば, $4i, \quad \pi i, \quad 3 + 4i$.
- 複素数は, 加減乗除できる：

$$\begin{aligned}&(1+i)\times(1+i)\\&= 1\times 1 + 1\times i + i\times 1 + i\times i\\&= 1 + i + i - 1 = 2i.\end{aligned}$$

- 納得いただけますか？ 複素数を完全に受容するまで, 人類は 2 世紀半要しました. こんなことも起こります：

$$\begin{aligned}-1 &= \sqrt{-1}\times\sqrt{-1}\\&= \sqrt{(-1)\times(-1)}\\&= \sqrt{1} = 1.\end{aligned}$$

Photo: Public domain, from Wikipedia.

どう問題をとらえるか

- 数が「ある」とはどういうことだろう?

$$\frac{1}{3} = 0.333333\ldots$$
$$\frac{1}{3} \times 3 = 0.333333\cdots \times 3$$
$$1 = 0.999999\ldots$$

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{4} = \frac{20}{24} + \frac{18}{24} = \frac{38}{24} = \frac{19}{12}$$
$$= \frac{10}{12} + \frac{9}{12}$$

- 複素数は, 加減乗除できる

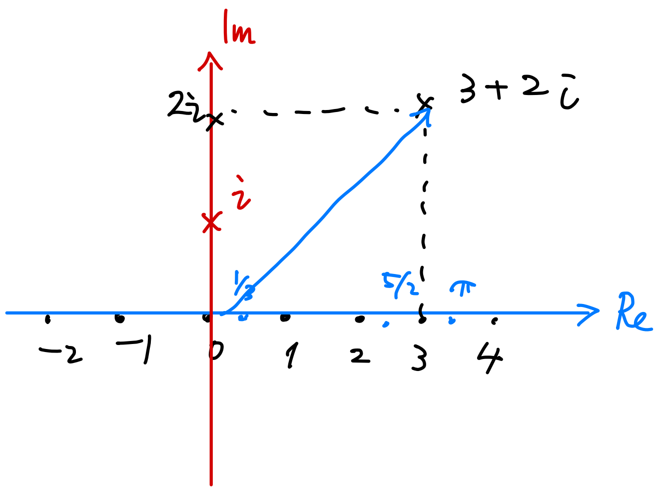
⋯ 複素数による数の集まりや, 複素数の間の加減乗除を定式化し (集合と写像), 計算が矛盾なく行えることを証明できる.

ゲオルク・カントール
(1845–1918)

Photo: Public domain, from Wikipedia.

複素平面 (複素数平面, ガウス平面)

カール・フリードリヒ・ガウス
(1777–1855)



i ⋯ 平面を90度まわす

Photo: Public domain, from Wikipedia.

余談：ハミルトンの四元数

- 虚数単位のように実数に付け加える「数」をもっと増やすこともできる．

$$
\begin{aligned}
i^2 = j^2 = k^2 &= -1, \\
ij = k, \quad jk = i, \quad ki &= j, \\
ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik &= -j.
\end{aligned}
$$

- 積の交換法則は，必ずしも成り立たない．
- コンピュータグラフィクスに有用．3 次元空間の座標を (x, y, z) で表し，四元数 $xi + yj + zk$ と対応させる．長さ 1 の 3 次元ベクトル (a, b, c) を軸とし，空間を角度 θ 回転させたとき，点 (x, y, z) は，

$$q \times (xi + yj + zk) \times \frac{1}{q}$$

に移る．ただし，

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + (ai + bj + ck)\sin\frac{\theta}{2}.$$

ウィリアム・ハミルトン
(1805–1865)

Photo: Public domain, from Wikipedia.

休憩

後半では，複素変数の関数についてご紹介します．

- 変数を複素数にまで拡張することは, 19 世紀以後の解析学の特色で, それによって古来専ら取扱われていたいわゆる初等関数の本性が初めて明らかになって, 微分積分法に魂が入ったのである. 複素数なしでは, 初等関数でも統制されない. 解析関数とはワイヤストラスの命名であるが, それは複素変数の関数が解析学に於ける中心的の位置を占有することを宣言したのであろう. (『解析概論』岩波書店, 1938 年初版)

高木貞治
(1875–1970)

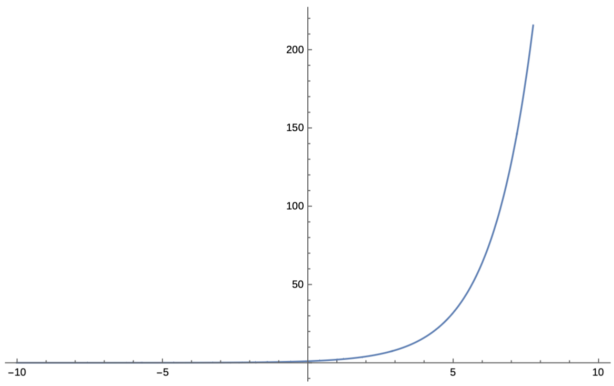
Photo: Public domain, from Wikipedia.

指数関数

- 「新規感染者数は指数関数的に増大する」
  未感染者が十分にたくさんいる所で, 1 日に 1 人が 2 人に感染させると,
  $$1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 16 \to 32 \to 64 \to 128 \to 256 \to 512 \to 1024 \to \ldots$$
  n 日後には, $2 \times 2 \times \cdots \times 2$ (2 を n 回かける) $= 2^n$.

- 3.5 日後であればどう見積もるのが妥当か?
  $$2^{3.5} = 2^3 \times 2^{0.5} = 8 \times \sqrt{2} = 11.31\ldots$$

- 高校で学ぶように, 実数 x に対して, 2^x を定義することができる.
  これを指数関数と呼ぶ.

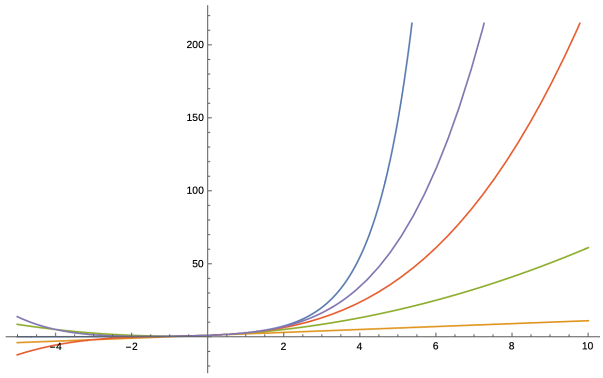


指数関数の解析的表示 (マクローリン展開 / テイラー展開)

- 2^x の意味は高校で学ぶが, その近似計算の方法は大学 1 年生で学ぶ:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \dots$$

(理論的な都合で 2 の代わりに, $e = 2.71828\dots$ を用いている)



- この「解析関数」としての表示を用いると, x に複素数を代入できる.

指数関数の解析接続とオイラーの等式

- たとえば,

$$\begin{aligned} e^{i\pi} &= 1 + i\pi + \frac{(i\pi)^2}{2} + \frac{(i\pi)^3}{6} + \frac{(i\pi)^4}{24} + \frac{(i\pi)^5}{120} + \frac{(i\pi)^6}{720} + \dots \\ &= 1 + i\pi - \frac{\pi^2}{2} - i\frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi^4}{24} + i\frac{\pi^5}{120} - \frac{\pi^6}{720} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^4}{24} - \dots\right) + i\left(\pi - \frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi^5}{120} + \dots\right) \\ &= \cos\pi + i\sin\pi \quad \text{(三角関数の解析的表示になる!)} \\ &= -1. \end{aligned}$$

定理（オイラーの等式）

$$e^{i\pi} + 1 = 0, \quad e^{iz} = \cos z + i\sin z$$

- このように, 関数の解析的な表示に基づいて, 関数がその定義域を自ら複素数の範囲に広げて行く現象を解析接続と呼ぶ.

$$\log(-1) = \pm\pi i, \pm 3\pi i, \pm 5\pi i, \dots.$$

$$\zeta(-1) = "1 + 2 + 3 + \dots" = -\frac{1}{12}.$$

- 我々は微分可能性によって解析関数を定義した．微分可能性は，約言すれば，z が z_0 に近づく経路に関係なく $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ の極限が一定であることを意味する．今同様に z_0 と z とを結ぶ通路に関係なく $\int_{z_0}^{z} f(z)dz$ が一定であることを（この場限り）かりに積分可能ということにしてみよう．然らばコーシーの定理は，複素変数の関数 $f(z)$ が微分可能ならば，積分可能であることを示し，またモレラの定理は，$f(z)$ が積分可能ならば，微分可能なることを示すものである．この意味において，複素数の世界では，微分可能も積分可能も同意語である．驚嘆すべき朗らかさ！コーシー及びそれに先立ってガウスが虚数積分に触れてから約百年を経て，我々はこの玲瓏な境地に達し得たのである．(『解析概論』岩波書店，1938 年初版)

高木貞治
(1875–1970)

Photo: Public domain, from Wikipedia.

対数関数の解析接続

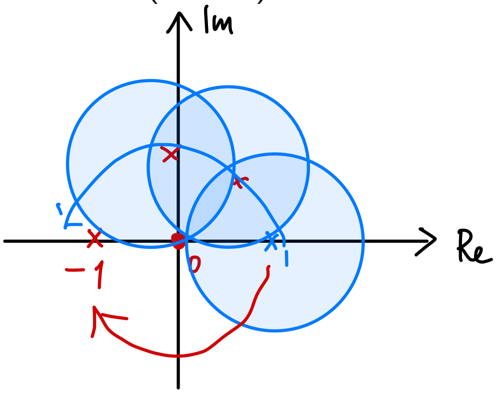
- 対数関数の解析接続は，多価関数となった：

$$\log(-1) = \pm\pi i, \pm 3\pi i, \pm 5\pi i, \dots.$$

これは $\log 0$ が定義できないことに起因している (真性特異点)：

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots.$$
$$\log(1+(-1)) = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = -\infty.$$

- 解析的表示には有効範囲 (収束域) があり，解析接続は特異点で限界が生じる場合がある．



リーマン面, 正則領域

- 解析関数を可能な限り目一杯, 解析接続した際に定義域となる空間 (リーマン面, 正則領域) をリーマンは問うた. 特に, この空間にアーベル積分・アーベル関数の本質があると見抜いた.
- リーマン面は, ワイルによって「1 次元連結複素多様体」として抽象的な定式化が与えられた.
- それ［リーマン面］はまた, 経験により多かれ少なかれ技巧的に解析関数から蒸留された何ものかではなく, あくまでそれ以前のもの, 母なる大地, その上にこそはじめて諸関数が生育し繁茂しうる大地とみなされなければならない. (ワイル『リーマン面』1913 年初版; 田村二郎訳, 岩波書店, 1974 年)

ベルンハルト・リーマン
(1826–1866)

多変数の正則領域

- 1 変数の解析関数の一般論は, 「1 次元連結複素多様体」の理論として定式化される.
- 多変数の解析関数に対して正則領域を考えると, 単なる「一般次元連結複素多様体」の理論にはならない. 正則領域は, ただの複素多様体ではなく, その形状に「擬凸性」と呼ばれる制約がつく (ハルトークス, 1906).
- 逆に, 「擬凸性を満たしていれば正則領域となるか」を問うハルトークスの逆問題 (レビ問題) は難問として残ったが, 1930〜40 年代の岡潔の独創的な研究により「不分岐リーマン領域」と呼ばれる空間に対して肯定的に解決された. (最終的な論文発表は 1953 年)

フリードリッヒ・ハルトークス
(1874–1943)

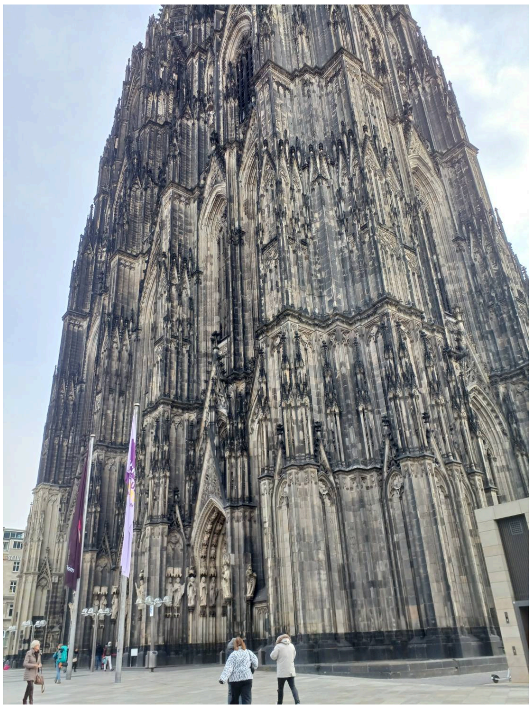
岡潔
(1901–1978)

現代の多変数関数論へ (1 つの視点)

- 岡潔の理論は当時難解とされたが, フランス・ドイツの数学者を中心に, 1950 年代に整備され, 現代数学で広く用いられる基礎理論となった.
- 1960〜70 年代にかけ, 多変数関数論に実解析学, 微分幾何学といった隣接分野から研究手法が持ち込まれ, よりフレキシブルな研究が可能となった. 様々な状況で解析関数等の解析接続や, その振る舞いが調べられており, これらの研究結果が数学や理論物理のより具体的な問題に応用されている.
- 足立は, 「レビ平坦」と呼ばれる状況を中心に研究を行っており, 「葉層構造」と呼ばれる高次元の流れに対する応用を念頭においている.

終わりに

- 静岡大学理学部数学科のホームページに, このスライドのデータと読書案内を掲載する予定です. また, 静大 TV に本日の録画も掲載する予定です.
- 静岡で対面でお話できる機会を楽しみにしています.
- なんでもご質問どうぞ.



ケルン大聖堂

Photo: Masanori Adachi

虚数の生み出す「玲瓏なる境地」読書案内

足立 真訓 (静岡大学理学部)

2022 年 4 月 28 日

今回のサイエンスカフェの内容に興味を持たれた方のために, おすすめの本を紹介します.

■小川洋子, 『博士の愛した数式』, 新潮文庫. オイラーの等式が出てくる小説です. すでに読まれた方, 映画を見られた方も多いのではないでしょうか.

■大栗博司,『大栗先生の超弦理論入門』, 講談社ブルーバックス. 大栗先生の本, どれもおすすめですが, 特にこの本では, 現代物理学で解析接続が現れる場面が紹介されています.

■鳥巣晶寛,『＃数学はじめました: 〜とりっぴーと学ぶオイラーの等式〜』, デザインエッグ社. 静岡大の卒業生が執筆しました. オイラーの等式の理解を目標に, 高校数学の要点をフレンドリーに解説しています.

■エビングハウス他, 『数』, 丸善出版. 様々な「数」を解説している数学史の本です.

■高木貞治, 『解析概論』, 岩波書店. 昭和以来読まれ続けている, 大学初年次の微分積分学のテキストです. 講演中にご紹介しましたように, 今回のサイエンスカフェのタイトルの言葉は, このテキストからとりました.

■スタイン, シャカルチ,『複素解析 (プリンストン解析学講義)』, 日本評論社. 複素解析学の教科書は良い本がたくさんありますが, 独学にはこの本がおすすめです. 丁寧に書かれており, 問題もたくさんついています.

■高木貞治, 『近世数学史談』, 岩波文庫. 19 世紀数学に関する格調高いエッセーです.

■大沢健夫,『現代複素解析への道標 レジェンドたちの射程』, 現代数学社. /『岡潔／多変数関数論の建設』, 現代数学社. 今回のサイエンスカフェでは, 複素解析学についてほんの少ししか紹介できませんでした. これらのエッセーでは, 数学の内容にも立ち入りつつ, 魅力的なエピソードが多数紹介されています.

■野口潤次郎,『多変数解析関数論 (第 2 版) —学部生へおくる岡の連接定理—』, 朝倉書店. /『岡理論新入門: 多変数関数論の基礎』, 裳華房. 岡潔の仕事に関する本格的かつ現代的な解説書です.