「デタラメ」は何を結論づけるのか？

岡村　和樹

サイエンスカフェ

はじめに

天下三不如意

『平家物語』の巻一には，白河法皇 (1053-1129) が「賀茂河の水，双六の賽，山法師，是ぞわが心にかなわぬもの」と嘆いたという逸話がある．

「賀茂河の水」とは，古来氾濫を繰り返す暴れ川として知られていた賀茂川がもたらす水害のこと．

「双六の賽（さい）」とは、盤双六の二つのサイコロが出す「賽の目」のことである．

「山法師」とは、勝手な理由にかこつけては日吉山王社の神輿を担いで都に雪崩れ込み強訴を繰り返した比叡山延暦寺の僧衆（僧兵）のこと．

サイコロの目を「人為的」「規則的」にはできない!!

ランダムネス

ランダム: 不規則, でたらめ（国語辞典的定義）
ランダムな数列 (random sequence) って何ですか?

0 と 1 からなる有限長の数列を考えよう.

- 長さ 3 のもの.

$$000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111$$

  の 8 通り
- 長さ 4 のもの.

$$0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111$$
$$1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111$$

  の 16 通り

頭 (千の位) に 0 をつけるか 1 をつけるか. —- 長さ n の数列. 2^n 通りある!

疑問

長さ 4 のもの.

$$0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111$$

$$1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111$$

の 16 通りのうち, どれが「ランダム」と言えるだろうか?

ランダムと言えないもの:
1. 全て 0, 全て 1 という場合 —- 0000, 1111
2. 交互に出る場合 —- 0101, 1010

$$\color{blue}{0000}, 0001, 0010, 0011, 0100, \color{blue}{0101}, 0110, 0111$$

$$1000, 1001, \color{blue}{1010}, 1011, 1100, 1101, 1110, \color{blue}{1111}$$

他にも「ランダムと言えないもの」があるかもしれない.

長さ 6 のもの. 64 個

$$
\begin{aligned}
&000000, 000001, 000010, 000011, 000100, 000101, 000110, 000111\\
&001000, 001001, 001010, 001011, 001100, 001101, 001110, 001111\\
&010000, 010001, 010010, 010011, 010100, 010101, 010110, 010111\\
&011000, 011001, 011010, 011011, 011100, 011101, 011110, 011111\\
&100000, 100001, 100010, 100011, 100100, 100101, 100110, 100111\\
&101000, 101001, 101010, 101011, 101100, 101101, 101110, 101111\\
&110000, 110001, 110010, 110011, 110100, 110101, 110110, 110111\\
&111000, 111001, 111010, 111011, 111100, 111101, 111110, 111111
\end{aligned}
$$

(1) 全て 0, 全て 1 という場合; (2) 交互に出る場合

$$\begin{array}{l}
000000, 000001, 000010, 000011, 000100, 000101, 000110, 000111\\
001000, 001001, 001010, 001011, 001100, 001101, 001110, 001111\\
010000, 010001, 010010, 010011, 010100, 010101, 010110, 010111\\
011000, 011001, 011010, 011011, 011100, 011101, 011110, 011111\\
100000, 100001, 100010, 100011, 100100, 100101, 100110, 100111\\
101000, 101001, 101010, 101011, 101100, 101101, 101110, 101111\\
110000, 110001, 110010, 110011, 110100, 110101, 110110, 110111\\
111000, 111001, 111010, 111011, 111100, 111101, 111110, 111111
\end{array}$$

最初だけ/最後だけ除いてあとは全て同じ数字でも「規則的」ではないか?

$$\begin{array}{l}
000000, 000001, 000010, 000011, 000100, 000101, 000110, 000111\\
001000, 001001, 001010, 001011, 001100, 001101, 001110, 001111\\
010000, 010001, 010010, 010011, 010100, 010101, 010110, 010111\\
011000, 011001, 011010, 011011, 011100, 011101, 011110, 011111\\
100000, 100001, 100010, 100011, 100100, 100101, 100110, 100111\\
101000, 101001, 101010, 101011, 101100, 101101, 101110, 101111\\
110000, 110001, 110010, 110011, 110100, 110101, 110110, 110111\\
111000, 111001, 111010, 111011, 111100, 111101, 111110, 111111
\end{array}$$

周期 3 でも「規則的」ではないか?

$$
\begin{array}{l}
000000, 000001, 000010, 000011, 000100, 000101, 000110, 000111\\
001000, 001001, 001010, 001011, 001100, 001101, 001110, 001111\\
010000, 010001, 010010, 010011, 010100, 010101, 010110, 010111\\
011000, 011001, 011010, 011011, 011100, 011101, 011110, 011111\\
100000, 100001, 100010, 100011, 100100, 100101, 100110, 100111\\
101000, 101001, 101010, 101011, 101100, 101101, 101110, 101111\\
110000, 110001, 110010, 110011, 110100, 110101, 110110, 110111\\
111000, 111001, 111010, 111011, 111100, 111101, 111110, 111111
\end{array}
$$

素数のところとそれ以外でそれぞれ同じ数字でも「規則的」ではないか?

$$
\begin{array}{l}
000000, 000001, 000010, 000011, 000100, 000101, 000110, 000111 \\
001000, 001001, 001010, 001011, 001100, 001101, 001110, 001111 \\
010000, 010001, 010010, 010011, 010100, 010101, 010110, 010111 \\
011000, 011001, {\color{blue}011010}, 011011, 011100, 011101, 011110, 011111 \\
100000, 100001, 100010, 100011, 100100, {\color{blue}100101}, 100110, 100111 \\
101000, 101001, 101010, 101011, 101100, 101101, 101110, 101111 \\
110000, 110001, 110010, 110011, 110100, 110101, 110110, 110111 \\
111000, 111001, 111010, 111011, 111100, 111101, 111110, 111111
\end{array}
$$

0 の個数=1 の個数でも (ちょっと粗いけど)「規則的」ではないか?

$$\begin{array}{l}
000000, 000001, 000010, 000011, 000100, 000101, 000110, 000111\\
001000, 001001, 001010, 001011, 001100, 001101, 001110, 001111\\
010000, 010001, 010010, 010011, 010100, 010101, 010110, 010111\\
011000, 011001, 011010, 011011, 011100, 011101, 011110, 011111\\
100000, 100001, 100010, 100011, 100100, 100101, 100110, 100111\\
101000, 101001, 101010, 101011, 101100, 101101, 101110, 101111\\
110000, 110001, 110010, 110011, 110100, 110101, 110110, 110111\\
111000, 111001, 111010, 111011, 111100, 111101, 111110, 111111
\end{array}$$

20 個ある.

とりあえずの結論: 意外と難しい. キリがない. — 何を持って「規則」とするか[1] が (少なくとも容易には) 定義できないことが原因.

しかし以下のような直感がある:

上であげたタイプの「規則的な」数列の全体に占める割合が「小さい」(最後のものを除いて). なぜ?

観察: 「大体の」数列はランダムに見える (が何をもってしてランダムの定義になるのか不明)

[1] これは関数の素朴な定義にも当てはまる.「規則」を書き下せない場合はどうするかも含めて集合論で定義することになる.

決定論と非決定論

(1) 大昔には, 人間にとって森羅万象がランダムネスに満ちていただろう.

(2) しかし, 太陽と月が東から昇り西に沈むこと, 四季, 夏至と冬至, 星座 (航海で重要), などの「周期的運動」の中に規則を見出していくことになる. — 「秩序」の発見 (ヨーロッパにおいては神の作った秩序)

(3) ニュートン (1642-1727) に始まる古典物理学の発展により状況は一変.
ラプラス (1749-1827): この世には真の偶然など存在せず, 偶然は人の無知無力の産物

—– 19 世紀: 決定論的世界観 (全ての未来が現在の状態から完全に決まるという考え方)
人間の歴史の方向すら必然的に決まっていると考えるようになり, 人間の自由意志とは何であるのかという悩みまで出現.

(4) 19 世紀の終わり頃: 統計力学の出現 — 物理学の世界に客観確率の概念が入る.

(5) 量子力学の出現 — 決定論的世界観自体は否定されることになる. しかし古典力学が誤っているわけではないので, この世には秩序と無秩序が混在すると考えられるようになる.

全くの混沌を取り扱っても仕方がないので, 何らかの秩序が背景にある「無秩序」を考えることにする.
確率・統計の役目 —- (何を持ってして無秩序とするかの考察に過度には深入りすることなく) 無秩序に見えるものの中から秩序を発見することを目指す.

歴史 (政治算術から確率モデルへ)

19 世紀 統計の時代でもあった; 自然科学, 社会科学に確率概念が入り込み始める.

しかしそこに至るまでに約 200 年の歴史がある. その「原点」とも言える「政治算術学派」の業績を述べる.

政治算術 (Political Arithmetic): イングランドで 17 世紀に開発された統計学的な社会の把握と将来予測の手法

グラント (1620-1674) 本業はイギリスの商人. 『死亡表に関する自然的および政治的諸観察』(1662) —- ロンドン市の教会の記録を元に出生死亡に関する資料を作り, 男女出生比率等々の安定性を発見.

ハレー [2](1656-1742) シレジアのブレスロー市 [3] の記録を元に精緻な生命表を作り, 生命保険の合理的な保険料の計算方法を編み出した.

政治算術の功績

ある事柄について調査を行い, 大量の資料 (データ) を集めると, 一定の法則が現れる (大数の法則).

しかし, なぜそのような法則が成り立つのかについては神に求めていた.

[2] ハレー彗星 (惑星以外で太陽系を公転する天体が初めて確認された例) でよく知られる

[3] 現在ではポーランドのブロツワフ

1654　パスカル (1623-1662) とフェルマー (1607-1665) の間の, 賭け事が途中で中止になった際の掛け金の公平な分配に関する文通. 2 人が何回戦か行うカードのゲームで，一方はあと 2 回，もう一方はあと 3 回, 先に勝ったほうが賞金を総取りするという状況で中止になった. 賞金をどう分配すべきか?

1713　ヤコブ・ベルヌーイ [4](1654-1705) による確率論における大数の法則の発見.

1738 ごろ　ド・モアブル (1667-1754) による中心極限定理の発見.

政治算術における大数の法則の根拠を確率論に求める考え方は 18C には一部の科学者の間ではあったが, ケトレー (1796-1874) によりその考え方が一般的になった.

[4] ベルヌーイ家は 17 世紀以降に活躍したヨーロッパの学者の一族で, 3 世代のうちに 8 人の傑出した数学者を輩出した.

20C; コルモゴロフ (1903-1987) による公理論的確率論 (1933)

コルモゴロフはヒルベルトによる公理主義の考えを確率に持ち込んだ. 「確率」の満たすべき公理系を与え, 公理を満たす限り何でも「確率」と認めることにした.

「現実の現象に現れる確率概念」と「数学の中の確率モデル」をはっきり区別できるようになった.

$\longrightarrow$ 現代数学の急速な進展を取り込むことができた

$\boxed{\text{20 世紀}}$ に顕著に進展した確率論の分野の例:

独立な確率変数の和 (整数格子上のランダムウォーク); 加法過程の研究

マルチンゲール理論 (ブラウン運動の性質, 確率積分の理論 (伊藤解析))

マルコフ過程論 (特異な空間の上の拡散過程の解析にも応用)

エルゴード理論 (力学系)

分枝過程や待ち行列理論

$\boxed{\text{21 世紀}}$ に入ってから顕著に進展した分野の例:

2 次元の物理モデルに関係した確率過程 (シュラム・レブナー発展)

確率幾何 (パーコレーションのような非常に複雑なランダムなグラフ; ネットワークに現れるグラフ構造) とその上の確率過程

ラフパス理論とその確率偏微分方程式への応用 (ハイラー理論).

今日までの確率論の結果の多くは，「理想状態」に近いランダムネスの下で，どのような確率法則が成り立つかを記述したものである．

「ランダムネスを生み出す (とみなせる) 枠組み」のもとでそこから何が帰結されるかを述べたもので，「ランダムネスとは何か」を記述することを目指している訳ではない．
コルモゴロフは論争を避けるために公理主義を採用した面もある．

「ランダムネスを生み出す (とみなせる) 枠組み」のごく簡単な例．コイン投げを繰り返す
—- 毎回のコイン投げ (試行) における表裏の出やすさは，それら以外のコイン投げの結果から影響を受けたものではありえないから，表裏の出方は「ランダム」であろう．(粗い推論)
—- 実際，多くの場合に，「規則」は見出せなかった．

コルモゴロフの公理系での記述が適切でない「ランダムネス」を含む (とみなせる) 現象・概念も現在では存在する (e.g. アルゴリズム的ランダムネス，実用的には疑似乱数)．

コイン投げにおける大数の法則

何がデタラメかを考えるのは (しっかり考えると) 難しいので棚上げして, それを生み出す (と思われる)「システム」のもとで考察をする.
以下,

「ランダムネスを生み出す (とみなせる) 枠組み」の下でそこから何が帰結されるか

を述べる.
ここでは最も簡単な「コイン投げにおける大数の法則」について述べる.

事象の確率: 起こるかどうかわからない事象の起こる可能性の度合いを数値化したもの.
数値化の仕方は (時と場合に応じて) 様々. 代表的なものとして,

- 同様に確からしい根元事象に分解する
- 頻度論 (JIS 規格)
- 主観確率 (ベイズ統計)

コイン投げを繰り返す場合は, 表が出る確率も裏が出る確率も共に $1/2$ であるとする.

2 項係数

n 回のコイン投げの場合の数 (2^n 通り):
表 (=1) と裏 (=0) からなる長さ n の数列において, 1 が k 個出るものの個数は, 組合せの考察から,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$$

である. これを並べたものがパスカルの三角形
真ん中が最も大きい. (n が偶数の時は $k = n/2$, n が奇数の時は $k = (n \pm 1)/2$)

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
\vdots \\
\vdots
\end{array}$$

「ちょうど半分個」の割合は?

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & 2 & 1 & & & \\ & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \\ 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \\ & & & & \vdots & & & & \end{array}$$

$n = 2$ のとき $\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

「ちょうど半分個」の割合は?

$$
\begin{array}{c}
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad {\color{red}6} \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
\vdots
\end{array}
$$

$n = 4$ のとき $\dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$

「ちょうど半分個」の割合は?

$$
\begin{array}{c}
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad {\color{red}20} \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
\vdots
\end{array}
$$

$n=6$ のとき $\frac{20}{64}=\frac{5}{16}$; これは先に述べた 0 の個数=1 の個数の場合に対応!

「ちょうど半分個」の割合は?

$$
\begin{array}{c}
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad {\color{red}70} \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
\vdots
\end{array}
$$

$n = 8$ のとき $\dfrac{70}{256} = \dfrac{35}{128}$

n を大きくするに従って (特別速くはないが) どんどん小さくなっていく……

実は, 最終的には割合が 0 に収束. しかし以下のことは正しいだろう:

予想

コインを多数回投げるとき, 大抵の場合, 表が出る回数と裏が出る回数は大体同じである.

大数の法則に相当する.

「だいたい半分個」の割合は? – 中心から 30%を許容

$$1 \quad 2 \quad 1$$
$$1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1$$
$$1\ 14\ 91\ 364\ 1001\ 2002\ 3003\ 3432\ 3003\ 2002\ 1001\ 364\ 91\ 14\ 1$$
$$\vdots$$

$n = 8$ のとき $\dfrac{91}{128} \fallingdotseq 0.71$, $n = 14$ のとき $\dfrac{13442}{2^{14}} \fallingdotseq 0.82$

n を大きくするに従って 1 に近づきそうではある!

予想

コインを<u>多数回</u>投げるとき, 大抵の場合, 表が出る回数と裏が出る回数は<u>大体</u>同じである.

「コインを多数投げる」だけでは「現実の現象に現れる確率概念」であり「数学の中の確率モデル」ではない．「多数回」「大体」とはどういうことか? — 曖昧さが残っている．
コルモゴロフの公理主義を採用．

数理モデル化

現実の (偶然) 現象 $\longrightarrow$ 数学の中の (確率) モデル

定義 1

Ω を有限集合とする．Ω の部分集合に 0 以上 1 以下の数値を対応させる関数 P で以下の条件を満たすものを Ω 上の確率という．

$$P(\Omega) = 1.$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \quad A \cap B = \emptyset (\text{交わらない; 排反})$$

ここで上の式は, 交わりを持たない Ω の部分集合 A, B <u>全てについて</u>成立することが条件である．
Ω 上の関数を確率変数という．通常, X, Y などの記号を用いる．

数学的に言えば, Ω 上の確率は,「Ω 上の関数」ではない．「Ω の部分集合全体のなす集合上の関数」である．どういうものを確率というか, と言えば実に多くのものが「確率」と呼べる．

Ω: 有限集合でない場合 —- 測度論 (ルベーグによる積分の理論)

組 (Ω, P) は，偶然現象に関係していなくても，上の条件を満たしている限り確率空間と呼ぶ．
Ω: 起こる可能性のあるもの全体，P: 事象の起こる可能性の度合いを数値化したもの，と解釈される．
確率変数は，確率的にとる値が決まる関数，と解釈される．

$\Omega_n = \{0,1\}^n$ とする．今の場合は $((0,\dots,0)$ から $(1,\dots,1)$ まで$)2^n$ 個ある．
任意の $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n) \in \Omega_n$ に対して，$P_n(\omega) = \dfrac{1}{2^n}$ と取り決める．このとき P_n は Ω_n 上の確率になっている．
また，$X_i(\omega) = w_i$，$1 \leq i \leq n$ と取り決める．

Ω_n の解釈 — コインを n 回投げた時の表裏の出方全体 (表が 1, 裏が 0 と解釈)
X_i の解釈 — コインを n 回投げた時に i 回目に出た「目」を表す．

解釈

現実の (偶然) 現象 $\longleftarrow$ 数学の中の (確率) モデル

数学モデルを解くのに解釈は必要ではない．解釈は複数ありうる．直感を掴むのに役立つ可能性はある．

コイン投げに関する大数の弱法則

任意の $\epsilon > 0$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty} P_n\left(\left\{\omega \in \Omega_n ; \left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > \epsilon\right\}\right) = 0$$

$X_1 + \cdots + X_n$: n 回目までに表が出た回数.
解釈をすると,

n 回コインを振ることを考える. n 回目までに表が出る回数の割合と $1/2$ との差の絶対値について, それが ϵ より真に大きい確率は, n を限りなく大きくするときに限りなく 0 に近づく.

もってまわった言い方だが, 主張自体がいわゆる ϵ-δ 論法に似ている (誤差の範囲を指定し, 何回以上コインを投げれば高い確率でその誤差範囲に留まるかを述べている).

$\epsilon = 0.15$ として先に出てきた「30%」の範囲になる.

先の「ちょうど半分個」とできないというのは, 上の主張において $\epsilon = 0$ と置き換えることは出来ないことを意味. 数式で書けば,

$$\lim_{n\to\infty} P_n\left(\left\{\omega \in \Omega_n ; \left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > 0\right\}\right) = 1.$$

歪んだコインを多数回投げる

表と裏の出る確率が異なる「コイン投げ」— 物理的に可能? しかしそれと本質的に同じものは意外と簡単に作れる.

サイコロ投げにおいて, 3 の目を 1 に, $4, 5, 6$ の目を 2 に替える
— 1 の出る確率は $1/3$; 2 の出る確率は $2/3$

この場合も大数の法則が成立!

$\Omega_n = \{1, 2\}^n$ とする. 改造されたサイコロを n 回投げた時の表裏の出方全体と解釈できる.
任意の $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_n$ に対して,

$$P_n(\omega) = \frac{2^k}{3^n}$$

と取り決める (ただし $k = \sharp\{i \le n : \omega_i = 2\}$).
このとき P_n は Ω_n 上の確率になっている.

$$X_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega_i = 1 \\ 0 & \omega_i = 2 \end{cases}$$

とおく.

歪んだコイン投げに関する大数の弱法則

任意の $\epsilon > 0$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty} P_n\left(\left\{\omega \in \Omega_n; \left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \frac{1}{3}\right| > \epsilon\right\}\right) = 0$$

解釈は,

表が出る確率が $1/3$ であるコインを n 回振ることを考える. n 回目までに表が出る回数の割合と $1/3$ との差の絶対値について, それが ϵ より真に大きい確率は, n を限りなく大きくするときに 0 に限りなく近づく.

少し細工をすれば, $1/3$ 以外でも「実現」可能.

表が出る確率が $1/4$ のコインの作り方 — 公平なコインをラベルをつけて 2 枚用意する (コイン 1, コイン 2). 更にもう 1 枚公平なコインを用意し (コイン 3), それを振る. コイン 3 を振って表が出たときコイン 1 を振るとし, 裏が出たときコイン 2 を振るとする. この操作でコイン 1 が振られてかつ表が出る確率が $1/4$ である.

コイン投げのモデルに対する大数の**強**法則も成立 — 定式化には測度論が必要.

(もう少し一般に) 確率論の法則

確率過程の長時間挙動 $(n \to \infty)$.

大数の法則 (law of large numbers)

確率過程の時間平均がある値に収束すること．強法則と弱法則の 2 タイプがある．

大数の法則が成り立つという仮定の下で以下を考える．

中心極限定理 (central limit theorem)

大数の法則での極限の周りの収束の様子を記述.

重複対数の法則 (law of the iterated logarithm)

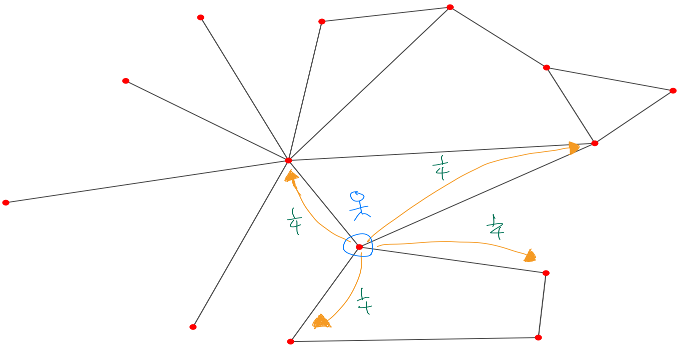
中心極限定理のオーダーの周りでの揺らぎを上極限の概念を用いて記述.

大偏差原理 (large deviation principle)

大数の法則での極限から外れる起こりにくい事象の確率の減衰の速さを精密に記述する枠組み．指数的に減衰すると期待される時に考察する．

ランダムウォーク

単純ランダムウォーク：単位時間ごとに隣り合う頂点に等確率で移るグラフ上の 1 粒子の動き



ランダムウォークを「点列」の形で書く．S_n をランダムウォークの時刻 n での位置とする．$(S_n)_n$ と書く．

$(S_n)_n$: 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォーク (=コイン投げ) の時:

大数の強法則

$$\frac{S_n}{n} \to 0, \text{ 概収束}$$

中心極限定理

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \text{正規分布} \ (\Longrightarrow\text{: 分布収束})$$

重複対数の法則

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n \log\log n}} = 1, \text{ 概収束}$$

$\limsup$: 上極限

大偏差原理

$$P\left(\frac{S_n}{n} \in A\right) \approx \exp\left(-n \inf_{x\in A} I(x)\right), \ n \to \infty, \ \exists I : \text{ レート関数, “}\forall\text{” } A.$$

$\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォークが時刻 $2n$ で出発点にいる確率

まずは小さい n で実験 —- 答えを組合せで書く

時刻 $2n$ で出発点にいるということは, 右の移動を $+$, 左への移動を $-$ とすると, $+$ が出た個数と $-$ が出た個数が一致することが必要十分条件であるので, 場合の数は,

$$\binom{2n}{n}$$

通りである.
このとき,

$$P(S_{2n} = 0) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

となる.

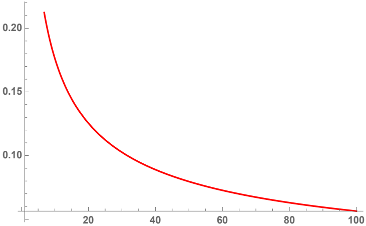


Figure: $\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$ のグラフ

そう見えないかもしれないが, 実は, $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ に類似している.

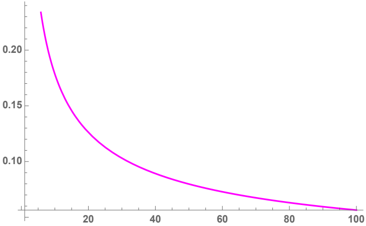


Figure: $y = \frac{C}{\sqrt{x}}$ のグラフ

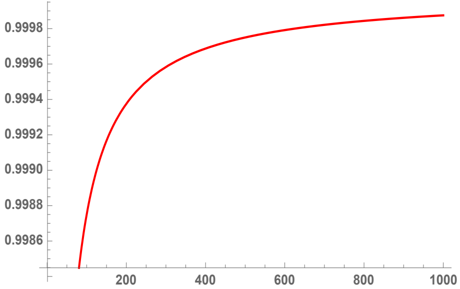


Figure: $\frac{\sqrt{n}}{C\cdot 2^{2n}}\binom{2n}{n}$

このグラフから以下が予想される:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^{2n}}\binom{2n}{n}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

ウォリスの公式と呼ばれる．不思議なことに，円周率 $\pi \fallingdotseq 3.14$ という幾何学的な量が出てくる!

ウォリスの公式からすぐにわかることとして,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = 0.$$

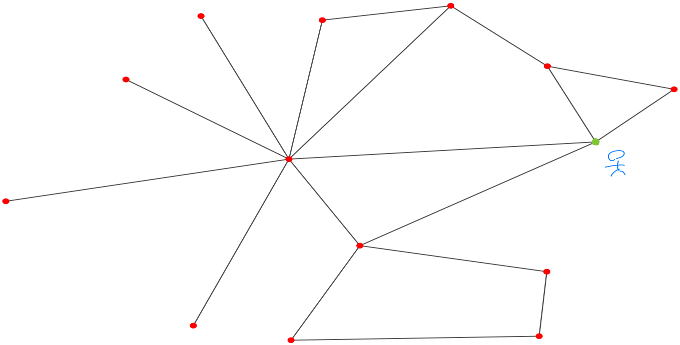
これは,「コインを偶数回投げたとき, 表の出る個数がちょうど半分個になる」確率は, コインを投げる回数 n を限りなく大きくしていくとき ($n \to \infty$ とするとき)0 に収束することを証明している.

収束の「速さ」が $n^{-1/2}$ であることも示されている.

ランダムウォークの訪問点の個数

R_n: 時刻 n までに単純ランダムウォークが訪問した点の個数;
R_n はマルコフ過程でないという困難 — R_n に対する大数法則？

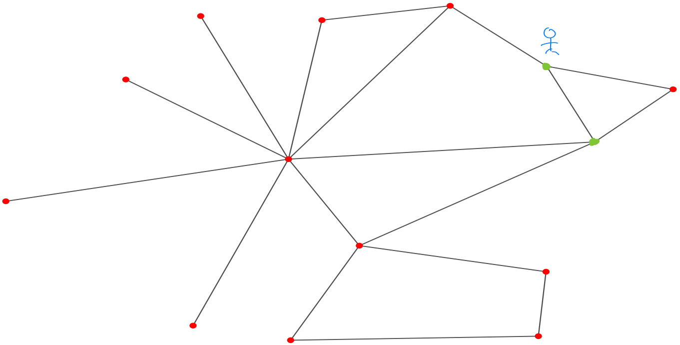
$$n = 0,\ R_0 = 1.$$



ランダムウォークの訪問点の個数

R_n: 時刻 n までに単純ランダムウォークが訪問した点の個数;
R_n はマルコフ過程でないという困難 — R_n に対する大数法則？

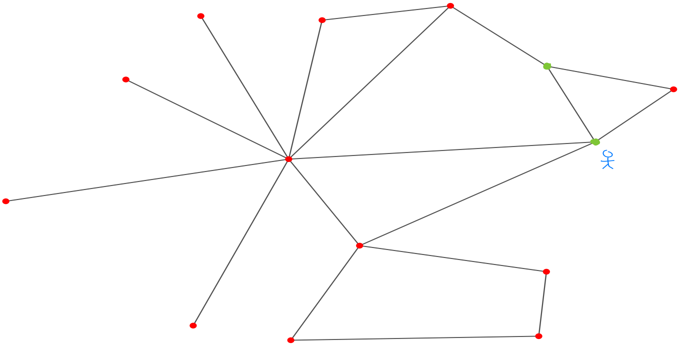
$$n = 1, \; R_1 = 2.$$



ランダムウォークの訪問点の個数

R_n: 時刻 n までに単純ランダムウォークが訪問した点の個数;
R_n はマルコフ過程でないという困難 — R_n に対する大数法則？

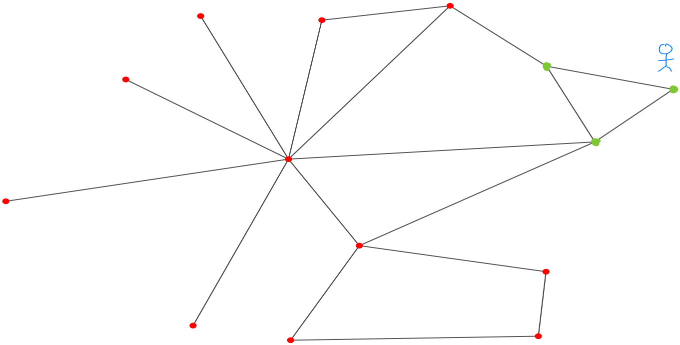
$$n = 2,\ R_2 = 2.$$



ランダムウォークの訪問点の個数

R_n: 時刻 n までに単純ランダムウォークが訪問した点の個数;
R_n はマルコフ過程でないという困難 — R_n に対する大数法則？

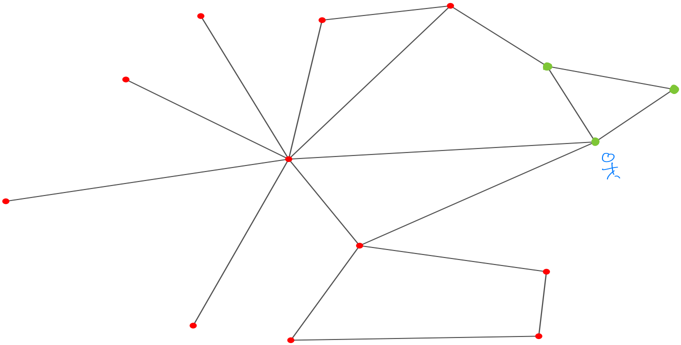
$$n = 3,\ R_3 = 3.$$



ランダムウォークの訪問点の個数

R_n: 時刻 n までに単純ランダムウォークが訪問した点の個数;
R_n はマルコフ過程でないという困難 — R_n に対する大数法則？

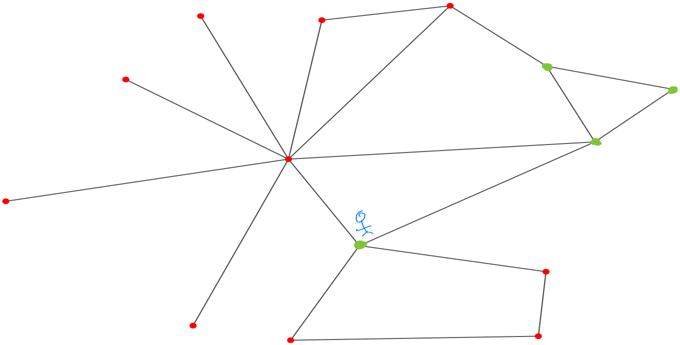
$$n = 4, \ R_4 = 3.$$



ランダムウォークの訪問点の個数

R_n: 時刻 n までに単純ランダムウォークが訪問した点の個数;
R_n はマルコフ過程でないという困難 — R_n に対する大数法則？

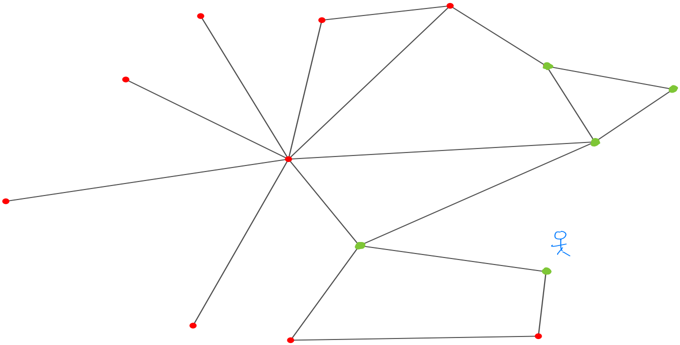
$$n = 5, R_5 = 4.$$



ランダムウォークの訪問点の個数

R_n: 時刻 n までに単純ランダムウォークが訪問した点の個数;
R_n はマルコフ過程でないという困難 — R_n に対する大数法則？

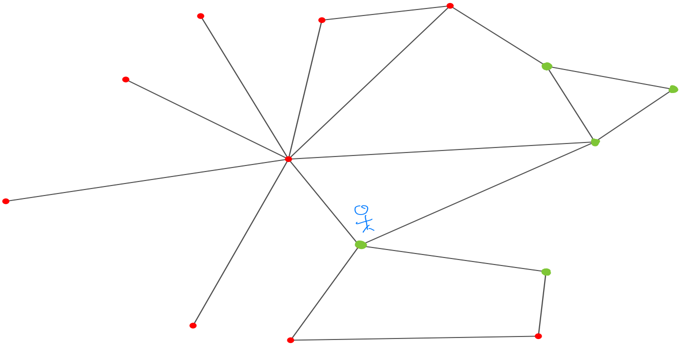
$$n = 6, R_6 = 5.$$



ランダムウォークの訪問点の個数

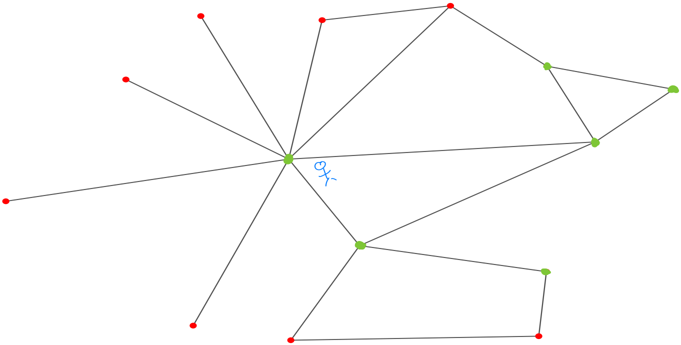
R_n: 時刻 n までに単純ランダムウォークが訪問した点の個数;
R_n はマルコフ過程でないという困難 — R_n に対する大数法則 ?

$$n = 7, R_7 = 5.$$



R_n: 時刻 n までに単純ランダムウォークが訪問した点の個数;
R_n はマルコフ過程でないという困難 — R_n に対する大数法則？

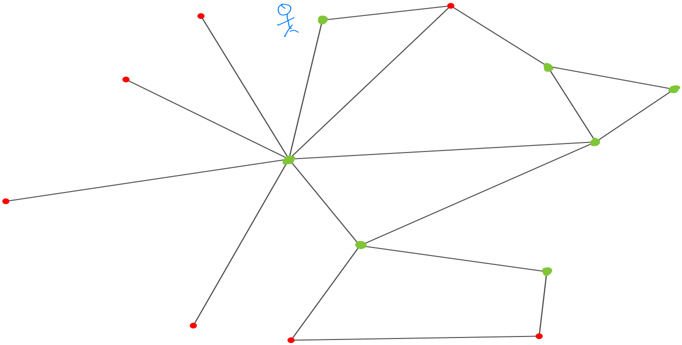
$$n = 8, R_8 = 6.$$



ランダムウォークの訪問点の個数

R_n: 時刻 n までに単純ランダムウォークが訪問した点の個数;
R_n はマルコフ過程でないという困難 — R_n に対する大数法則？

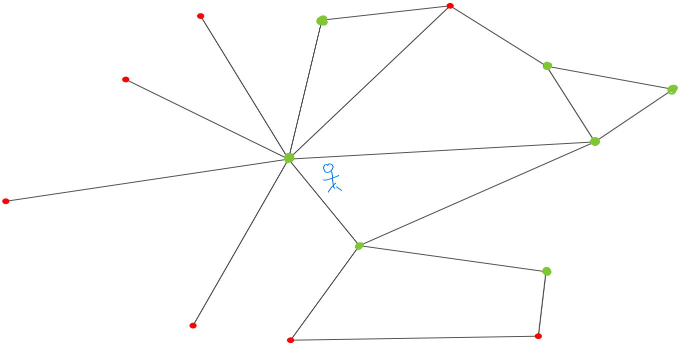
$$n = 9, R_9 = 7.$$



ランダムウォークの訪問点の個数

R_n: 時刻 n までに単純ランダムウォークが訪問した点の個数;
R_n はマルコフ過程でないという困難 — R_n に対する大数法則 ?

$$n = 10, R_{10} = 7.$$



ドヴォレツキー・エルデシュ(1951)

$\mathbb{Z}^3$ (ジャングルジム)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n}{n} = \text{正定数}.$$

$\mathbb{Z}^2$ (方眼紙)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n}{n/\log n} = \pi.$$

実は, 高次元の方が簡単.

$$\mathbb{Z}^d := \{(x_1, \ldots, x_d) : x_1, \cdots, x_d \in \mathbb{Z}\}$$

$d \geq 4$ の時も (図には描けないけれども!) 定義できる.

エルデシュ(1913-1996). ハンガリー出身の数学者. 多くの論文を出版. 「エルデシュ数」でも有名.

疑問

もっと一般のグラフ (ネットワーク) 上では?

グラフ: 「頂点」とそれらを結ぶ「辺」から構成される対象.

なぜ「一般のグラフ」なのか?

複雑な系の上の物理現象

- (1960s-) 数理物理学者による，不均質な媒質での熱や電気の拡散の研究．例：高分子上の熱伝導
- パーコレーション上のランダムウォーク:　ド・ジェンヌ (1991 ノーベル物理学賞) により「迷路の中のアリ」と呼ばれる
- (1980s-) 数学的に厳密な研究 (フラクタル上の確率過程)
- ネットワークの上のウイルスがどのようなスピードで拡散するか，汚染物質が土壌にしみ込む際のスピードはどうなるか，といった比較的身近な問題とも関係

身近な例: ゴム手袋をすると熱くない! — 熱の拡散が遅いから．しかしある程度の時間熱いものを持っていたら，ゴム手袋をしていても熱くなってしまう．

技術的な難点: 整数格子上でのテクニック (フーリエ解析，エルゴード定理など) が使えない．

熱方程式 (熱の拡散の速度を記述する関係式)

t: 時刻，x: 位置，

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) = c\frac{\partial}{\partial t}u(t,x),\ \ t>0, x\in\mathbb{R}$$

「頂点 x から出発したランダムウォークが時刻 n で頂点 y にいる確率 $p_n(x,y)$」は，熱の伝わり方と関係があるため，熱核 (heat kernel) と呼ばれている．

$$u(n,x) = \sum_{y} p_n(x,y)f(y)$$

は「グラフ上の」熱方程式を満たしている．

熱の拡散とランダムウォークの長時間挙動の関係 (スペクトル次元)

$$d_s := -2 \lim_{n\to\infty} \frac{\log p_{2n}(x,x)}{\log n}$$

d_s が大きいほど熱の拡散が速いとみなせる．整数とは限らない．単純ランダムウォークを走らせるグラフ (空間)G の幾何学的特徴のみで決まる

例えば $\mathbb{Z}^d$ 上では $d_s = d$ である．

講演者の結果 (2014;2021)

$d_s > 2$ のとき，

$$R_n \simeq n, n \to \infty$$

$d_s = 2$ のとき，

$$R_n \simeq \frac{n}{\log n}, n \to \infty$$

参考文献

本講演で述べた程度の確率の歴史については, 例えば,
楠岡成雄, 「ランダムネス」, 『数学の未解決問題 21 世紀数学への序章』サイエンス社.
———-, 『確率・統計』, 森北出版, 1995.

アルゴリズム的ランダムネスについては, 例えば,
杉田洋『確率と乱数』数学書房
木原貴行『ランダムネス入門』http://www.math.mi.i.nagoya-u.ac.jp/~kihara/pdf/teach/Random_LectureNote.pdf

疑似乱数に関しては, 例えば,
松本眞『デタラメさを作るのって、難しい』https://ocw.u-tokyo.ac.jp/lecture_913/

ランダムウォークと熱核に関しては, 専門的だが, 例えば,
M. Barlow, Random walks and heat kernels on graphs, Cambridge University Press, 2017.

講演者の結果については, 専門的だが,
K. Okamura, On the range of random walk on graphs satisfying a uniform condition, ALEA, Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics 11 (2014) 341-357.
K. Okamura, Some results for range of random walk on graph with spectral dimension two, *Journal of Theoretical Probability* 34 (2021) 1653-1688.