エッジイデアルの代数的性質

木村 杏子 (静岡大学理学部数学科)

サイエンスカフェ in 静岡

第 140 話　2019 年 11 月 7 日 (木)

エッジイデアルとは？

- グラフから生ずるイデアル.
- イデアル ??… 環論的対象.
- 環 ???

代数的性質

- 剰余環の性質
  - **Cohen–Macaulay**
  - **unmixed**
  - **sequentially Cohen–Mcaulay**
  - **...**
- エッジイデアルの極小自由分解
  - ベッチ数
  - 射影次元
  - **(Castelnuovo–Mumford) regularity**
  - **...**

本日のお品書き

- 第一部 **(18:00 – 18:40)**
  - 可換環 $\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{R}$-加群
  - $\boldsymbol{R}$-加群の極小自由分解
  - 可換環のイデアル, 剰余環
- 休憩 **(18:40 – 18:50)**
- 第二部 **(18:50 – 19:30)**
  - 有限単純グラフのエッジイデアル

環とは ⋯

和・差・積の定義された集合を **環** という.

例. 次の集合は環である.

- $\mathbb{Z}$: 整数全体の集合.
- $\mathbb{R}$: 実数全体の集合.
- $\mathbb{C}$: 複素数全体の集合.
- $\mathbb{Q}$: 有理数全体の集合.

特に, $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$ においては, (0 で割ることを除く) 商もある. このような集合を **体** という.

★ 環の例.

例. $\boldsymbol{K}$ を体とし, $\boldsymbol{n}$ を $\mathbf{1}$ 以上の整数とする.
次の集合は環である.

- $\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{K})$: $\boldsymbol{K}$ を成分とする $\boldsymbol{n}$ 次行列全体の集合.
- $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{x}]$: $\boldsymbol{K}$ 上の $\mathbf{1}$ 変数多項式環.
- $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}]$: $\boldsymbol{K}$ 上の $\boldsymbol{n}$ 変数多項式環.

注意. $\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{K})$ において, 積の可換律は成り立たない:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

ここでは可換環のみを扱うことにする.

★ $\boldsymbol{R}$-加群.

ベクトル空間から始めよう.

$\boldsymbol{K}$: 体.

$\boldsymbol{V}$: $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間.

…和と $\boldsymbol{K}$ 倍が定義された集合.

$\boldsymbol{V}$ が有限次元のとき, $\boldsymbol{V}$ には 基底 が存在する.

$\boldsymbol{e_1, \ldots, e_n}$ が $\boldsymbol{V}$ の 基底 とは, $\boldsymbol{V}$ のどの元 $\boldsymbol{v}$ も,

$$\boldsymbol{v = c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n, \quad c_1, \ldots, c_n \in K}$$

の形に一意的に表せるときにいう.

$e_1, \dots, e_n$ が V の 基底 であることは, 次の 2 条件が成り立つこととと同値である:

- $e_1, \dots, e_n$ は 一次独立 である. すなわち,

$$c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n = 0 \Longrightarrow c_1 = \cdots = c_n = 0;$$

- $e_1, \dots, e_n$ は V を張る (生成する). すなわち, V のどの元 v も,

$$v = c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n, \quad c_1, \dots, c_n \in K$$

の形に表せる.

V の (空でない) 部分集合 W で, V における和と K 倍について閉じているものを V の 部分空間 という.

★ 有限次元ベクトル空間の例.

$\boldsymbol{K} = \mathbb{R}$, $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$:

$$\mathbb{R}^{\mathbf{3}} = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} \;:\; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ の基底である.

$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ が $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ の基底であること:

$\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ の任意の元 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix}$ は

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \boldsymbol{y} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \boldsymbol{z} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

と表せる．また，この表し方は一意的である．

問題. $\mathbb{R}^2$ の部分集合はいつ部分空間になるか.

$\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ の部分空間の例:

$$\boldsymbol{W_1} = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}} \ : \ \boldsymbol{z} = \mathbf{0} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \ : \ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\boldsymbol{W_2} = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}} \ : \ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \mathbf{0} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} \ : \ \boldsymbol{z} \in \mathbb{R} \right\}.$$

★ $\boldsymbol{R}$-加群.

$\boldsymbol{R}$ が環のとき，ベクトル空間の定義と同様に，$\boldsymbol{R}$-加群 $\boldsymbol{M}$ を考えることができる(体 $\boldsymbol{K} \longrightarrow$ 環 $\boldsymbol{R}$).

$\boldsymbol{M}$: $\boldsymbol{R}$-加群⋯和と $\boldsymbol{R}$ 倍の定義された集合.
部分 $\boldsymbol{R}$-加群も同様に定義される.

★ $\boldsymbol{R}$-加群の例.

例. $\boldsymbol{R} = \mathbb{Z}$ とするとき，$\boldsymbol{M} = \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ は $\boldsymbol{R}$-加群であり，$\boldsymbol{N} = \mathbb{Q}[\boldsymbol{x}]$ は $\boldsymbol{M}$ の部分 $\boldsymbol{R}$-加群である.

$\boldsymbol{R}$-加群の “ 基底 ” は?··· 一般には存在しない.

基底の存在する $\boldsymbol{R}$-加群は自由 $\boldsymbol{R}$-加群と呼ばれる.
自由 $\boldsymbol{R}$-加群を $\bigoplus \boldsymbol{R}$ で表す.
例. $\mathbb{R}$ 加群 $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ は自由 $\mathbb{R}$-加群である.

$$\mathbb{R}^{\mathbf{3}} = \mathbb{R}^{\oplus \mathbf{3}} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}.$$

生成系 は存在する.
有限なものが存在するときには, 有限生成 $\boldsymbol{R}$-加群と呼ばれる.

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_s \in \boldsymbol{M}$ が $\boldsymbol{R}$-加群 $\boldsymbol{M}$ を生成するとき,
$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}_s$ と表す.

有限生成自由 $\boldsymbol{R}$-加群の場合:
$\boldsymbol{M = Ra_1 \oplus Ra_2 \oplus \cdots \oplus Ra_s}$ なる $\boldsymbol{a_1, \ldots, a_s}$ が存在する.

自由 $\boldsymbol{R}$-加群はベクトル空間と同様に扱える
… 簡単なもの.

一般の $\boldsymbol{R}$-加群は自由 $\boldsymbol{R}$-加群にどれくらい "近い" か?
自由 $\boldsymbol{R}$-加群で " 近似 " できないか？
… (極小) 自由分解.

R は Noether 局所環であると仮定する.
M を R-加群とする.
このとき, M の極小自由分解が同型を除いて一意的に定まる:

$$\cdots \xrightarrow{d_2} \bigoplus R^{\beta_1} \xrightarrow{d_1} \bigoplus R^{\beta_0} \xrightarrow{\epsilon} M \to 0.$$

- $\beta_i(M) := \beta_i$ を M の第 i ベッチ数 という.
- 極小自由分解の長さを M の 射影次元 といい, $\mathrm{pd}_R(M)$ で表す. (極小自由分解の長さが有限でないときは, $\mathrm{pd}_R(M) = \infty$ と定める.)

自由 R-加群 $M = R^{\oplus s}$ の極小自由分解は

$$0 \to R^{\oplus s} \to M \to 0.$$

注意. 一般には, 射影分解を考えることになる.
ベッチ数や射影次元は同様に定義される.

★ イデアル.

環 $\boldsymbol{R}$ 自身は $\boldsymbol{R}$-加群である.
$\boldsymbol{R}$ の部分 $\boldsymbol{R}$-加群を イデアル という.

以下, $\boldsymbol{I}$ を環 $\boldsymbol{R}$ のイデアルとする.

イデアルが有限生成のとき, 有限生成イデアルという.

イデアル $\boldsymbol{I}$ が $\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_s \in I}$ で生成されるとき,
$\boldsymbol{I = (a_1, a_2, \ldots, a_s)}$ で表す.

★ イデアルの例.

例. 整数環 $\mathbb{Z}$ を考えよう.
$\mathbb{Z}$ のイデアルは, どのようなものがあるか？

$\boldsymbol{m}$ を $(\mathbf{0}$ 以上の$)$ 整数とすると, $(\boldsymbol{m})$ は $\mathbb{Z}$ のイデアル.
$((\boldsymbol{m})$ は $\boldsymbol{m}$ の倍数全体の集合である. 例えば,

$$(\mathbf{5}) = \{\ldots, -\mathbf{15}, -\mathbf{10}, -\mathbf{5}, \mathbf{0}, \mathbf{5}, \mathbf{10}, \mathbf{15}, \ldots\}.)$$

実は, $\mathbb{Z}$ のイデアルは, このようなのものに限られる.
$(\mathbb{Z}$ の $\mathbf{0}$ でない任意のイデアルは, それに含まれる最小の正の整数で生成される.$)$ 例えば, $(\mathbf{6}, \mathbf{10}) = (\mathbf{2})$.
一般に, $(\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_s) = (\mathbf{gcd}\{\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_s\})$.

例. S を, 体 K 上の n 変数多項式環とする.

- $n = 1$ のとき $(S = K[x])$:
  S の任意のイデアル I は, ただ一つの元で生成される. ($I \neq 0$ のとき, I は, I に含まれる 0 でない多項式のうち, 次数最小のもので生成される.)
- $n \geq 2$ のとき $(S = K[x_1, \ldots, x_n])$:
  S のイデアルは, 一つの元で生成されるとは限らない (例えば, $I = (x_1, x_2)$) が, 有限生成 であることはいえる (**Hilbert** の基底定理).

これは, S が **Noether** 環 であることを意味する.

多項式環のイデアルが単項式で生成されるとき,
それを 単項式イデアル という.

特に, スクエアフリーな単項式で生成されるとき,
スクエアフリー単項式イデアル という.

例.

$\boldsymbol{x_2^3 x_3 x_6^2}$ ⋯ 単項式.

$\boldsymbol{x_1 x_3 x_4}$ ⋯ スクエアフリー単項式.

$\boldsymbol{(x_2 x_3^3, x_1 x_5 x_6, x_2^3 x_4^2)}$ ⋯ 単項式イデアル.

$\boldsymbol{(x_2 x_4 x_5, x_1 x_3, x_3 x_4 x_5, x_2 x_6)}$

⋯ スクエアフリー単項式イデアル.

★ 剰余環.

環 $\mathbb{Z}$ とそのイデアル (5) を考えよう.

任意の整数は, 5 で割った余りで分類される:

$$
\begin{array}{lll}
\text{余り } 0: & \ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots & \cdots\ \overline{0}. \\
\text{余り } 1: & \ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots & \cdots\ \overline{1}. \\
\text{余り } 2: & \ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots & \cdots\ \overline{2}. \\
\text{余り } 3: & \ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots & \cdots\ \overline{3}. \\
\text{余り } 4: & \ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots & \cdots\ \overline{4}.
\end{array}
$$

$$\overline{-1} = \overline{4},\ \overline{-2} = \overline{3},\ \overline{-3} = \overline{2},\ \overline{6} = \overline{1},\ \overline{5} = \overline{0}, \ldots$$

のようにして, 5 で割った余りが同じものを“ 同一視 ”する.

$\mathbf{5}$ で割った余りが同じものを “ 同一視 ” することで, 新たな集合ができる:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}/(\mathbf{5}) :=& \{\overline{\boldsymbol{m}} \ : \ \boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}\} \\ =& \{\overline{\mathbf{0}}, \overline{\mathbf{1}}, \overline{\mathbf{2}}, \overline{\mathbf{3}}, \overline{\mathbf{4}}\}.\end{aligned}$$

$\mathbb{Z}/(\mathbf{5})$ は次の演算により環になる:

和: $\overline{\boldsymbol{m}} + \overline{\boldsymbol{n}} := \overline{\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}}$.

積: $\overline{\boldsymbol{m}} \cdot \overline{\boldsymbol{n}} := \overline{\boldsymbol{m}\boldsymbol{n}}$.

★ $\mathbb{Z}/(5)$ の演算表を作ってみよう.

和

$+$	$\overline{\mathbf{0}}$	$\overline{\mathbf{1}}$	$\overline{\mathbf{2}}$	$\overline{\mathbf{3}}$	$\overline{\mathbf{4}}$
$\overline{\mathbf{0}}$					
$\overline{\mathbf{1}}$					
$\overline{\mathbf{2}}$					
$\overline{\mathbf{3}}$					
$\overline{\mathbf{4}}$					

積

$\cdot$	$\overline{\mathbf{0}}$	$\overline{\mathbf{1}}$	$\overline{\mathbf{2}}$	$\overline{\mathbf{3}}$	$\overline{\mathbf{4}}$
$\overline{\mathbf{0}}$					
$\overline{\mathbf{1}}$					
$\overline{\mathbf{2}}$					
$\overline{\mathbf{3}}$					
$\overline{\mathbf{4}}$					

★ 剰余環.

R を環とし, I を R のイデアルとする.
集合 $R/I := \{\overline{a} \ : \ a \in R\}$ を考えよう. ただし,

$$\overline{a} = \overline{b} :\overset{\text{def}}{\iff} a - b \in I.$$

R/I は, 次の演算により環となる
(これを 剰余環 という):

和: $\overline{a} + \overline{b} := \overline{a + b}$.
積: $\overline{a} \cdot \overline{b} := \overline{ab}$.

R/I には自然に R-加群の構造も入る.

★ 多項式環の斉次イデアル.

S を体 K 上の n 変数多項式環とする.

多項式 f について, f に現れる単項式がすべて同じ次数のとき, f は斉次多項式といわれる.
S のイデアル I は, 斉次多項式で生成されるとき斉次イデアルといわれる.

I が斉次イデアルのとき, S/I には 次数付環 の構造が入る: $S/I = \bigoplus_{\sigma \in \mathbb{Z}^n} (S/I)_{\sigma}$.
● S 自身も次数付環である.

S は一般に局所環ではないが, 次数付極大イデアルはただ一つである: $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$. このことから, S/I の (次数付) 極小自由分解を考えることができる.

S/I の次数付極小自由分解:

$$0 \to \bigoplus_{\sigma \in \mathbb{Z}^n} S(-\sigma)^{\beta_{p,\sigma}} \to \cdots \to \bigoplus_{\sigma \in \mathbb{Z}^n} S(-\sigma)^{\beta_{1,\sigma}} \\ \to S \to S/I \to 0.$$

- $\beta_{i,\sigma}(S/I) := \beta_{i,\sigma}$: S/I の 次数付 ベッチ数.
- p (極小自由分解の長さ):
  S/I の 射影次元, $\mathrm{pd}_S(S/I)$ で表す.
  (Hilbert の syzygy 定理から長さ有限である.)
- $\mathrm{reg}(S/I) := \max\{|\sigma| - i \ : \ \beta_{i,\sigma}(S/I) \neq 0\}$:
  S/I の (Castelnuovo–Mumford) regularity.

ただし, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ のとき,

$$|\sigma| := \sigma_1 + \cdots + \sigma_n.$$

★ エッジイデアル

$G = (V(G), E(G))$: 有限単純グラフ.

$V = V(G)$: G の頂点集合. $(\#V = n.)$

$E(G)$: G の辺集合.

$S = K[v : v \in V] (= K[x_1, \ldots, x_n])$:

体 K 上の多項式環.

- G の エッジイデアル:

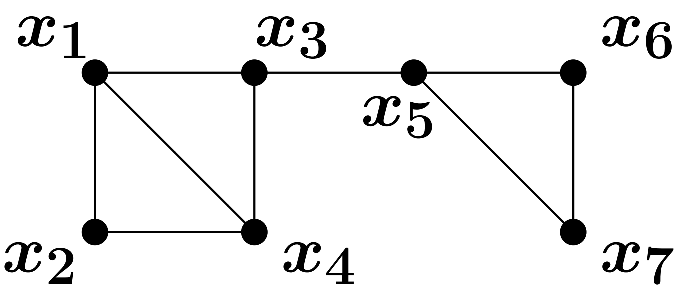
$$I(G) = (uv \ : \ \{u, v\} \in E(G)) \subset S.$$

- G の エッジイデアル:

$$I(G) = (uv \ : \ \{u, v\} \in E(G)) \subset S.$$

- 例

G:



$$I(G) = (x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_4, x_3x_4, \\ x_3x_5, x_5x_6, x_5x_7, x_6x_7).$$

問題. ベッチ数や射影次元, **regularity** をグラフの言葉で記述せよ.

注意. 一般には体の標数によるため，これは不可能である.

どうするか $\cdots$

- グラフ G が良い性質をもつ場合について考える.
- $S/I(G)$ が良い性質をもつグラフについて考える.

良い性質 ???

★ 環の性質.

- $S/I(G)$ が **Cohen–Macaulay.**
- $I(G)$ が **unmixed.**
- $S/I(G)$ が **sequentially Cohen–Macaulay.**

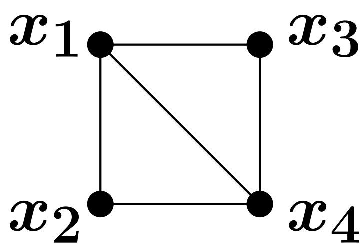
上のそれぞれについて,

- G が **Cohen–Macaulay.**
- G が **unmixed.**
- G が **sequentially Cohen–Macaulay.**

ということにする.

★ イデアルの高さと unmixed 性.

例. G:



$$\begin{aligned} I(G) &= (x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_4, x_3x_4) \\ &= (x_1, x_4) \cap (x_1, x_2, x_3) \cap (x_2, x_3.x_4). \end{aligned}$$

- $I(G)$ の高さ: $\operatorname{height} I(G) = 2$.
- unmixed でない.

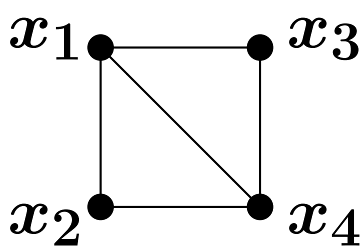
★ G の unmixed 性 ⋯ グラフの言葉で.

G が unmixed

$\iff$ G の minimal vertex cover の濃度が一定

$\iff$ G の maximal independent set の濃度が一定.

例. G:



$$
\begin{aligned}
I(G) &= (x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_4, x_3x_4) \\
&= (x_1, x_4) \cap (x_1, x_2, x_3) \cap (x_2, x_3.x_4).
\end{aligned}
$$

x_2, x_3 $\qquad$ x_4 $\qquad$ x_1

$S/I(G)$: Cohen–Macaulay

$$:\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \text{height}\, I(G) = \text{pd}_S\, S/I(G).$$

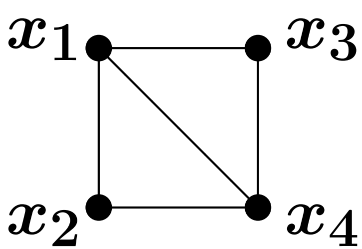
注意.

- 一般には height $I(G) \le \text{pd}_S\, S/I(G)$.
- unmixed かつ sequentially Cohen–Macaulay

$$\Longleftrightarrow \text{Cohen–Macaualy.}$$

先の例のグラフ G は sequentially Cohen–Macaulay.

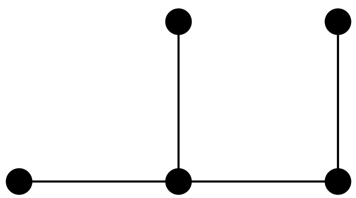
G:



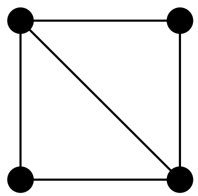
★ 良い性質のグラフ.

- 木 (サイクルをもたない連結なグラフ).
- 弦グラフ.
- 二部グラフ.

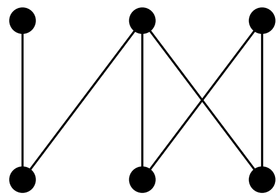
木:



弦グラフ:



二部グラフ:



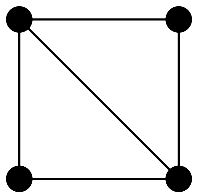
注意. 木は弦グラフである.

★ 何が知られているか.

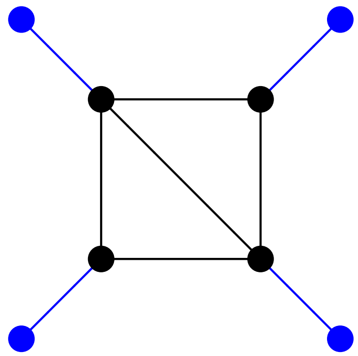
- 任意の **whiskered graph** は **Cohen–Macaualy (Villarreal, 1990).**
- 弦グラフは **sequentially Cohen–Macaulay (Francisco and Van Tuyl, 2007).**
- **Cohen–Macaualy** 二部グラフの特徴づけ **(Herzog and Hibi, 2005).**
- **unmixed** 二部グラフの特徴づけ **(Villarreal, 2007).**
- **sequentially Cohen–Macaulay** 二部グラフの構造に関する研究
  (Van Tuyl and Villarreal, 2008).

★ whiskered graph.

任意のグラフ



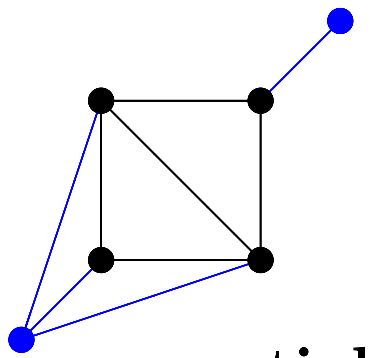
$\longrightarrow$

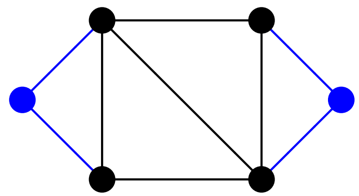


whiskered graph

Cohen–Macaulay (Villarreal)

clique vertex-partition 上に whisker をとる





sequentially Cohen–Macaulay
(Cook II and Nagel, 2012)

★ Cohen–Macaulay 二部グラフの特徴づけ.

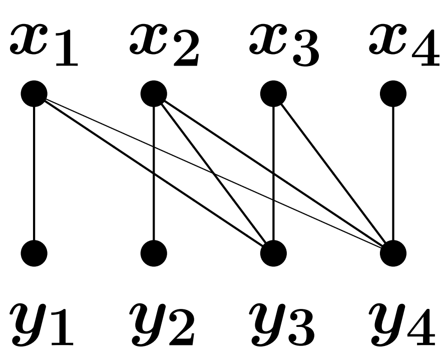
定理 (Herzog and Hibi, 2005).
G を孤立点のない二部グラフとする.
G が Cohen–Macaulay であるための必要十分条件は, 次を満たす $V(G)$ の bipartition $V(G) = \{x_1, \ldots, x_h\} \sqcup \{y_1, \ldots, y_h\}$ があることである:

(i) $\{x_k, y_k\} \in E(G)$ $(k = 1, \ldots, h)$.

(ii) 相異なる i, j, k について,

$$\{x_i, y_j\}, \{x_j, y_k\} \in E(G) \Longrightarrow \{x_i, y_k\} \in E(G).$$

(iii) $\{x_i, y_j\} \in E(G) \Longrightarrow i \leq j$.



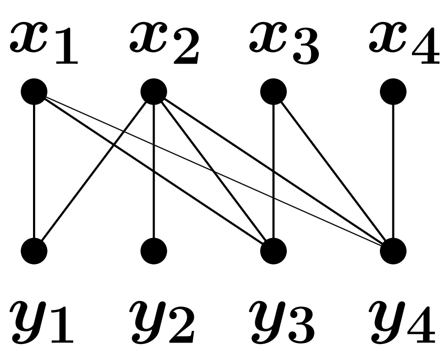
★ **unmixed 二部グラフの特徴づけ.**

定理 (Villarreal, 2007).
G を孤立点のない二部グラフとする.
G が unmixed であるための必要十分条件は, 次を満たす $V(G)$ の bipartition $V(G) = \{x_1, \ldots, x_h\} \sqcup \{y_1, \ldots, y_h\}$ があることである:

(i) $\{x_k, y_k\} \in E(G)$ $(k = 1, \ldots, h)$.

(ii) 相異なる i, j, k について,

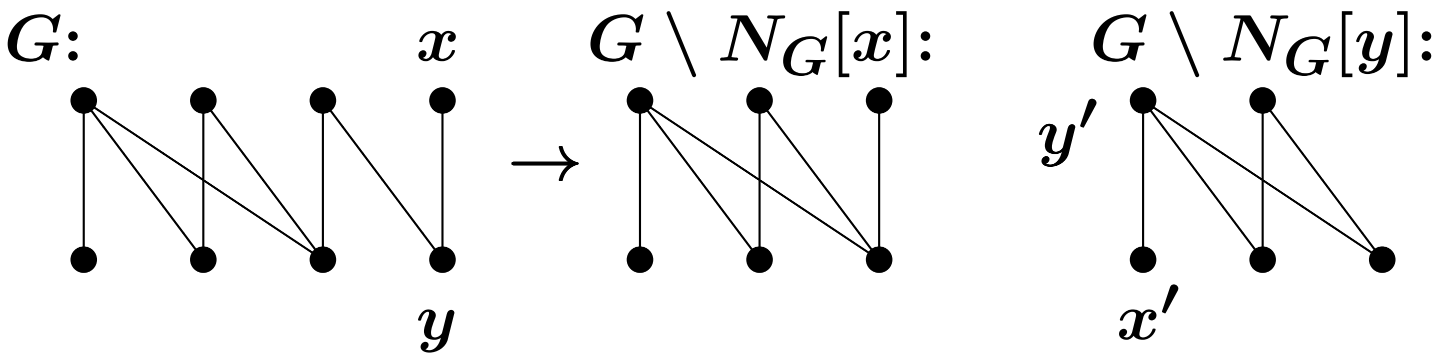
$$\{x_i, y_j\}, \{x_j, y_k\} \in E(G) \Longrightarrow \{x_i, y_k\} \in E(G).$$



★ sequentially Cohen–Macaulay 二部グラフ.

定理 (Van Tuyl and Villarreal, 2008).
二部グラフ G が sequentially CM であるための必要十分条件は, 次を満たす辺 $\{x, y\}$ が存在すること:

- $\deg(x) = 1$.
- $G \setminus N_G[x]$ と $G \setminus N_G[y]$ はsequentially CM.

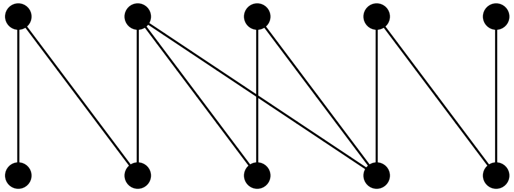


★ 極小自由分解について知られていること.

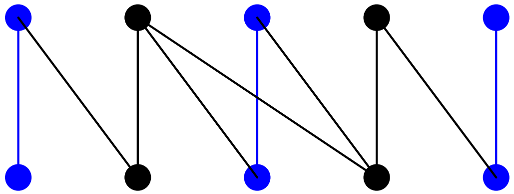
- $I(G)$ が linear resolution をもつ $\iff$ $\mathrm{reg}(S/I(G)) = 1 \iff \overline{G}$ が弦グラフ (Fröberg, 1990).
- induced matching number が regularity の下限となること (Katzman, 2006).
- Cohen–Macaualy 二部グラフの極小自由分解の特徴づけ(Herzog and Hibi, 2005).
- unmixed 二部グラフの極小自由分解の特徴づけ (Mohammadi and Moradi, 2015).

★ 誘導マッチング数 $\mathbf{indmatch}(\boldsymbol{G})$.

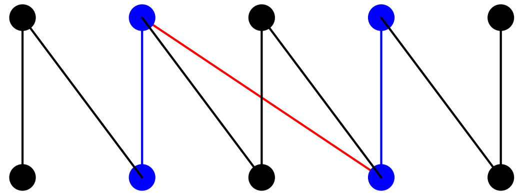
$\boldsymbol{G}$:



$$\mathbf{indmatch}(\boldsymbol{G}) = \mathbf{3}$$



誘導マッチング



×

定理 (**Katzman, 2006**).

$$\mathbf{indmatch}(\boldsymbol{G}) \leq \mathbf{reg}\, \boldsymbol{S}/\boldsymbol{I}(\boldsymbol{G}).$$

一般に, 等号は成立しない (例: **5** 角形グラフ).

定理.
次のグラフ G について, $\mathrm{indmatch}(G) = \mathrm{reg}\, S/I(G)$ が成り立つ.

(1) 木 (Zheng, 2004).

(2) 弦グラフ (Hà and Van Tuyl, 2008).

(3) unmixed 二部グラフ (Kummini, 2009).

(4) sequentially Cohen–Macaulay 二部グラフ (Van Tuyl, 2009).

(5) very well-covered グラフ (Mahmoudi, Mousivand, Crupi, Rinaldo, Terai, and Yassemi, 2011).

★ ベッチ数の非消滅定理 (K, 2012, 2016).

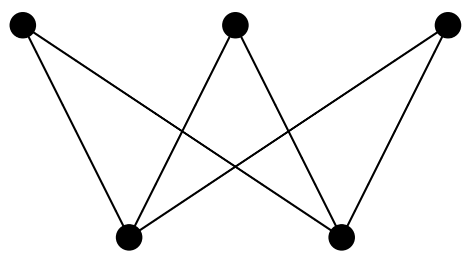
G を $V = V_1 \sqcup V_2$ 上の二部グラフとする.

G: 型 $(\#V_1, \#V_2)$ の完全二部グラフ

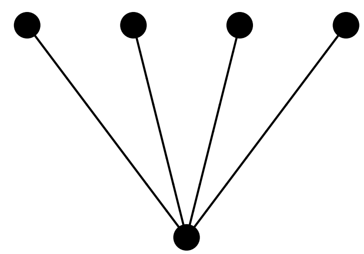
$:\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$ に対し $\{x_1, x_2\} \in E(G)$.

型 $(1, n)$ の完全二部グラフをブーケという.

例.



型 $(2, 3)$



型 $(1, 4)$
ブーケ

定理 ([K, 2016]).
G を V 上の有限単純グラフとする.
G の完全二部部分グラフ $B_1, \ldots, B_r$ で次を満たすものが存在するとする:

(C1) $k \neq \ell$ に対し $V(B_k) \cap V(B_\ell) \neq \emptyset$.

(C2) $e_k \in E(B_k)$ $k = 1, \ldots, r$ で, $e_1, \ldots, e_r$ が G の誘導マッチングとなるものが存在する.

このとき $\sigma = V(B_1) \cup \cdots \cup V(B_r)$ とすれば

$$\beta_{|\sigma|-r, \sigma}(S/I(G)) \neq 0.$$

$V(\mathcal{B}) := \bigcup V(B_k)$ とおく.

★ ベッチ数の非消滅性の特徴付け.

定理 ([K, 2012]).
G を V 上の弦グラフとする.
このとき, $\beta_{i,\sigma}(S/I(G)) \neq 0$ であるための必要十分条件は, (C1), (C2) を満たす ブーケ の集合 $\mathcal{B}$ で, $V(\mathcal{B}) = \sigma$ かつ $i = |\sigma| - |\mathcal{B}|$ を満たすものが存在することである.
さらに G が木のとき, この条件を満たすならば $\beta_{i,\sigma}(S/I(G)) = 1$ である.

★ 射影次元.

(寺井直樹氏と **Siamak Yassemi** 氏との共同研究)

定理 ([**K, 2016**], [**K–Terai–Yassemi, 2018**]).
$\boldsymbol{G}$ が **very well-covered** グラフのとき,
($\boldsymbol{G}$ が **very well-covered** グラフのとき,)

$$\mathbf{pd}(\boldsymbol{S}/\boldsymbol{I}(\boldsymbol{G})) = \max_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\{|\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\mathcal{B}})| - |\boldsymbol{\mathcal{B}}|\},$$

ただし, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ は (**C1**), (**C2**) を満たす完全二部部分グラフの集合をはしる.

★ 今後の展開 $\cdots$ グラフから超グラフへ.

グラフのときは $\mathbf{2}$ 次生成,
これを一般のスクエアフリー単項式イデアルに拡張する.