無限次元ベクトル空間のはなし

松本 敏隆 (静岡大学理学部)

FACULTY OF SCIENCE
SHIZUOKA UNIVERSITY

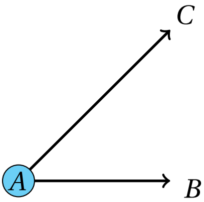
2019 年 5 月 23 日 (木)
サイエンスカフェ in 静岡

1. ベクトルって?

- 中学校では

理科で登場する力の向きと大きさを表す矢印.

問: A にある重りを $A \to B$ 方向と $A \to C$ 方向に矢印の長さに応じた力で引くとき，どの方向にどれくらいの大きさの力が働く？



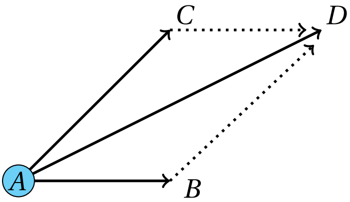
1. ベクトルって?

- 中学校では

理科で登場する力の向きと大きさを表す矢印.

問: A にある重りを $A \to B$ 方向と $A \to C$ 方向に矢印の長さに応じた力で引くとき，どの方向にどれくらいの大きさの力が働く？

答: AB と AC を 2 辺とする平行四辺形を $ABCD$ とすると，対角線である $A \to D$ 方向に線分 AD の長さに応じた力が働く.



- 高校では

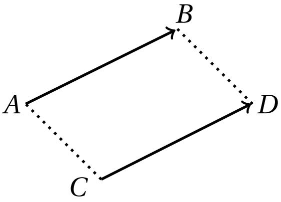
(1) 向きと大きさを表す矢印

A を始点, B を終点という.

平行移動によって一致するものは

同じと見做す.

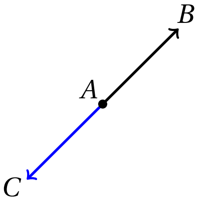
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$



$\overrightarrow{AB}$ と長さが同じで向きが逆のベクトルを

$-\overrightarrow{AB}$ で表す.

$$\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}.$$



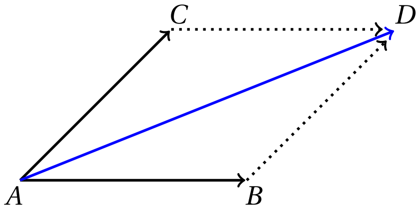
ベクトルの和と実数倍

図の $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の和 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ を定義しよう.

AB, AC を 2 辺とする平行四辺形 $ABCD$ を考えて

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$$

と定める.



ベクトルの和と実数倍

図の $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の和 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ を定義しよう.

$AB,\ AC$ を 2 辺とする平行四辺形 $ABCD$ を考えて

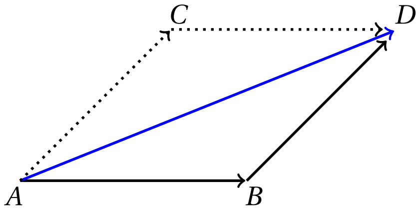
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$$

と定める.　$\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{BD}$ は同じベクトルなので

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$$

と考えてもよい.　定義から和の順序を変えても同じである.

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.$$



- **実数 × ベクトル**

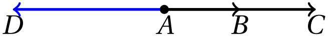
λ を実数とする. λ と $\overrightarrow{AB}$ の積 $\lambda\overrightarrow{AB}$ をつぎで定義する:

$\lambda > 0$ のとき　向きが同じで長さが $\overrightarrow{AB}$ の λ 倍のベクトル

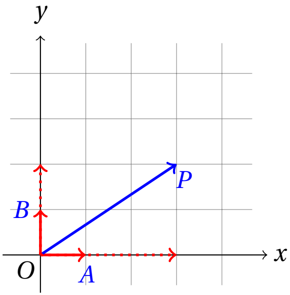
$\lambda = 0$ のとき　$\vec{0}$

$\lambda < 0$ のとき　向きが逆で長さが $\overrightarrow{AB}$ の $-\lambda$ 倍のベクトル

$$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB}.$$



(2) ベクトルの成分表示



平面に座標軸を描いて，始点を原点に固定する．$A(1,0)$, $B(0,1)$ とし，

$$\vec{e_1} = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{e_2} = \overrightarrow{OB}$$

とおく．　例えば, $P(3,2)$ は

$$\overrightarrow{OP} = 3\vec{e_1} + 2\vec{e_2}$$

と一意的に表すことが出来る．
任意の点 $P(a_1, a_2)$ に対して $\overrightarrow{OP}$ は $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ を用いて一意的に書ける:

$$\overrightarrow{OP} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}.$$

$\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ を**完全正規直交系**といい，$\overrightarrow{OP} = (a_1, a_2)$ を成分表示という．

成分表示した場合の $\overrightarrow{f} = (a_1, a_2)$ と $\overrightarrow{g} = (b_1, b_2)$ の和, 実数倍は
つぎのようになる:

$$\overrightarrow{f} + \overrightarrow{g} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$
$$\lambda\overrightarrow{f} = (\lambda a_1, \lambda a_2).$$

ベクトル $\overrightarrow{f} = (a_1, a_2)$ の大きさ (長さ) を $\|\overrightarrow{f}\|$ で表すと

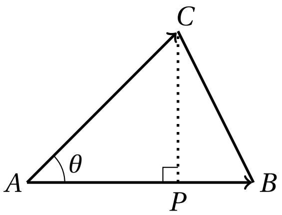
$$\|\overrightarrow{f}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

$\|\cdot\|$ を**ノルム**という.

2. ベクトルの内積

三角形 ABC の頂点 A を始点とする
ベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ の内積を次で定める:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cos\theta$$
$$= \overline{AB} \cdot \overline{AP}.$$



成分表示では $\vec{f} = (a_1, a_2)$ と $\vec{g} = (b_1, b_2)$ の内積は

$$(\vec{f}, \vec{g}) = \|\vec{f}\| \cdot \|\vec{g}\| \cos\theta = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

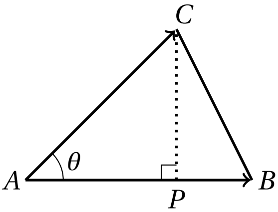
ベクトルのノルム (大きさ) は内積を用いて表すことができる:

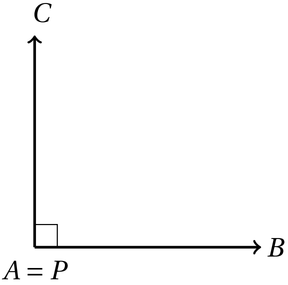
$$\|\vec{f}\| = \sqrt{(\vec{f}, \vec{f})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

特に $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ と $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$ は同値である.

実際

$$
\begin{aligned}
(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cos 90^\circ \\
&= \overline{AB} \cdot \overline{AP} = 0.
\end{aligned}
$$





これまで平面 (2 次元) のベクトルについて述べてきたが,

空間 (3 次元) のベクトルについても同様である.

$\vec{e_1} = (1,0,0)$, $\vec{e_2} = (0,1,0)$, $\vec{e_3} = (0,0,1)$ とすると

任意の点 $P(a_1, a_2, a_3)$ に対して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}\\ &= a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1)\\ &= (a_1, a_2, a_3)\end{aligned}$$

と一意的に書け, $\overrightarrow{OP} = (a_1, a_2, a_3)$ と $\overrightarrow{OQ} = (b_1, b_2, b_3)$ の内積も

$$(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

で定義されて,

$$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OQ} \iff (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) = 0.$$

$\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ は完全正規直交系である.

4 次元以上になると矢印の絵を描くことは出来ない.

$\Longrightarrow$ 成分表示を用いればよいのでは？

一般に，V_n を n 個の実数の組 $\mathbf{f} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 全体の集合とし，

$\mathbf{f} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\mathbf{g} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in V_n$ と実数 λ に対して

2 次元，3 次元の時の類推で和，実数倍，内積を

$$\begin{aligned} \mathbf{f} + \mathbf{g} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n), \\ \lambda \mathbf{f} &= (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n), \\ (\mathbf{f}, \mathbf{g}) &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n. \end{aligned}$$

で定義すればよいだろう.

このとき，V_n はベクトル空間？

- 大学での (実数体上の) ベクトル空間の定義

定義 1. (ベクトル空間)

集合 V が次の条件 (I), (II) を満たすときベクトル空間という:

(I) V に和が定義されていて次を満たす:

(i) $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h} \in V$ に対して

$$\mathbf{f}+\mathbf{g}=\mathbf{g}+\mathbf{f}, \quad (\mathbf{f}+\mathbf{g})+\mathbf{h}=\mathbf{f}+(\mathbf{g}+\mathbf{h}).$$

(ii) すべての $\mathbf{f} \in V$ に対して $\mathbf{f}+\mathbf{0}=\mathbf{f}$ をみたす元 $\mathbf{0} \in V$ が存在する.

(iii) 任意の $\mathbf{f} \in V$ に対して $\mathbf{f}+\mathbf{g}=\mathbf{0}$ をみたす $\mathbf{g} \in V$ が存在する.
このの $\mathbf{g}$ を $-\mathbf{f}$ と表す.

定義 1. (ベクトル空間) 続き

(II) 任意の実数 λ と $\mathbf{f} \in V$ に対して積 $\lambda\mathbf{f} \in V$ が定義されていて次を満たす:

(iv) 任意の $\mathbf{f} \in V$ に対して $1\mathbf{f} = \mathbf{f}$.

(v) 任意の実数 λ, μ と $\mathbf{f} \in V$ に対して

$(\lambda\mu)\mathbf{f} = \lambda(\mu\mathbf{f})$.

(vi) 任意の実数 λ, μ と $\mathbf{f}$, $\mathbf{g} \in V$ に対して

$\lambda(\mathbf{f}+\mathbf{g}) = \lambda\mathbf{f} + \lambda\mathbf{g}, \quad (\lambda+\mu)\mathbf{f} = \lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{f}$.

大雑把に述べれば，$\mathbf{f}$, $\mathbf{g} \in V$ と実数 λ に対して

$$\mathbf{f}+\mathbf{g} \in V, \quad \lambda\mathbf{f} \in V$$

が成り立てば O.K.

定義 2. (内積の定義)

ベクトル空間 V の元 $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ に対して実数を対応させる写像 $(\mathbf{f},\mathbf{g})$ が

つぎを満たすとき V 上の内積という：

(i) 任意の $\mathbf{f} \in V$ に対して

$$(\mathbf{f},\mathbf{f}) \geqq 0, \quad (\mathbf{f},\mathbf{f}) = 0 \iff \mathbf{f} = \mathbf{0}.$$

(ii) 任意の $\mathbf{f}$, $\mathbf{g} \in V$ に対して

$$(\mathbf{f},\mathbf{g}) = (\mathbf{g},\mathbf{f}).$$

(iii) 任意の実数 λ, μ と $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ に対して

$$(\mathbf{f}, \lambda\mathbf{g} + \mu\mathbf{h}) = \lambda(\mathbf{f},\mathbf{g}) + \mu(\mathbf{f},\mathbf{h}).$$

内積をもつベクトル空間を**内積空間**と呼ぶことにする.

2 次元，3 次元の時と同様に，$(\mathbf{f},\mathbf{g}) = 0$ のとき, $\mathbf{f}$ と $\mathbf{g}$ は直交するという.

V が内積空間の時,

$$\|\mathbf{f}\| = \sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f})}$$

でノルムを定義すると，つぎが成り立つ:

定理 1.

V を内積空間とする．$\mathbf{f}$, $\mathbf{g} \in V$ と実数 λ に対してつぎが成り立つ．

(i) $\|\mathbf{f}+\mathbf{g}\| \leqq \|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{g}\|$.　(三角不等式)

(ii) $\|\lambda\mathbf{f}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{f}\|$.

(iii) $\left|(\mathbf{f}, \mathbf{g})\right| \leqq \|\mathbf{f}\| \cdot \|\mathbf{g}\|$.　(シュワルツの不等式)

- シュワルツの不等式の証明

$\mathbf{f} \neq 0$, t を実数とすると

$$\begin{aligned} 0 \leqq \|t\mathbf{f}+\mathbf{g}\|^2 &= (t\mathbf{f}+\mathbf{g}, t\mathbf{f}+\mathbf{g}) \\ &= \|\mathbf{f}\|^2 t^2 + 2(\mathbf{f},\mathbf{g})\, t + \|\mathbf{g}\|^2. \end{aligned}$$

任意の実数 t に対して 2 次不等式

$$\|\mathbf{f}\|^2 t^2 + 2(\mathbf{f},\mathbf{g})\, t + \|\mathbf{g}\|^2 \geqq 0$$

が成り立つので,

$$|(\mathbf{f},\mathbf{g})|^2 - \|\mathbf{f}\|^2 \cdot \|\mathbf{g}\|^2 \leqq 0.$$

$V_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_j$ は実数$\}$ は定義 1，定義 2 を満たすので内積空間である．V_n を**数ベクトル空間**と呼ぶことにする．

V_n の任意のベクトル $\mathbf{f} = (a_1, a_2 \ldots, a_n)$ は

$$\mathbf{e_1} = (1, 0, \ldots, 0),\ \mathbf{e_2} = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e_n} = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

を用いて

$$\mathbf{f} = a_1\mathbf{e_1} + a_2\mathbf{e_2} + \cdots + a_n\mathbf{e_n}$$

と一意的に表すことが出来て，

$$(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k). \end{cases} \quad (j \neq k \text{ ならば直交する})$$

V_n は $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ を完全正規直交系とする n 次元ベクトル空間である．

定理 2. (完全正規直交系の存在)

V を内積空間とする．V には完全正規直交系が存在する．

即ち，(有限個または無限個の) ベクトル $\{e_k\}$ が存在して，

V の任意のベクトルは $\{e_k\}$ の実数倍の (有限または無限) 和として

表すことが出来る．

ここまでのまとめ

n 次元数ベクトル空間:

$$V_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) : 各\ a_k\ は実数\}.$$

V_n の完全正規直交系:

$$\mathbf{e_1} = (1, 0, \ldots, 0),\ \mathbf{e_2} = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e_n} = (0, 0, 0, \ldots, 1).$$

V_n の任意のベクトル $\mathbf{f} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ は

$$\mathbf{f} = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{e}_k = a_1\mathbf{e_1} + a_2\mathbf{e_2} + \cdots + a_n\mathbf{e_n}$$

と一意的に書ける.

ここで $n \to \infty$ とした場合を考えてみよう.

V_∞ を実数の無限列 $\mathbf{f} = (a_1, a_2, \ldots)$ 全体の集合とし,

$\mathbf{f} = (a_1, a_2, \ldots)$, $\mathbf{g} = (b_1, b_2, \ldots) \in V_\infty$ と実数 λ に対して

$$\begin{aligned}\mathbf{f} + \mathbf{g} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots), \\ \lambda \mathbf{f} &= (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots)\end{aligned}$$

で和と実数倍を定義することにより, V_∞ はベクトル空間になる.

内積も同様に

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n + \cdots \qquad (\clubsuit)$$

で定義すればよいだろう.

しかし, $\mathbf{f} = (a_1, a_2, \ldots)$, $\mathbf{g} = (b_1, b_2, \ldots) \in V_\infty$ に対して

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n + \cdots \qquad (\clubsuit)$$

は必ずしも有限な値にはならない.

実際, $\mathbf{f} = (1, 1, \cdots)$ とすると

$$\|\mathbf{f}\|^2 = (\mathbf{f}, \mathbf{f}) = 1^2 + 1^2 + \cdots = \infty.$$

ノルムが有限な値にならないと**解析を行うには都合が悪い.**

そこで，　V_∞ の部分集合 ℓ^2 をつぎで定める：

$$\ell^2 = \left\{ \mathbf{f} = (a_1, a_2, \cdots) \in V_\infty \;\middle|\; \|\mathbf{f}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2} \text{ が有限} \right\}.$$

ℓ^2 は内積空間となっているだろうか.

先ず，$\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \ell^2$ のとき，$\mathbf{f}+\mathbf{g} \in \ell^2$ を確認しよう．

$\mathbf{f} = (a_1, a_2, \cdots)$, $\mathbf{g} = (b_1, b_2, \cdots)$ に対して

$$\mathbf{f}_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad \mathbf{g}_n = (b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

とおくと，$\mathbf{f}_n$, $\mathbf{g}_n \in V_n$ だから定理 1 (i) (三角不等式) より

$$\|\mathbf{f}_n + \mathbf{g}_n\| \leqq \|\mathbf{f}_n\| + \|\mathbf{g}_n\|$$

$$\iff \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leqq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

$n \to \infty$ として

$$\|\mathbf{f}+\mathbf{g}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)^2} \leqq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2} = \|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{g}\| < \infty.$$

よって，$\mathbf{f}+\mathbf{g}\in\ell^2$. 定理 1 (ii) より $\lambda\mathbf{f}\in\ell^2$ は明らか.

$\Longrightarrow$ ℓ^2 はベクトル空間.

また，定理 1 (iii) (シュワルツの不等式) より

$$|(\mathbf{f}_n,\mathbf{g}_n)| \leqq \|\mathbf{f}_n\|\|\mathbf{g}_n\|$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n}|a_k||b_k| \leqq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

$n\to\infty$ として

$$\left|(\mathbf{f},\mathbf{g})\right| \leqq \sum_{k=1}^{\infty}|a_k||b_k| \leqq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2} = \|\mathbf{f}\|\cdot\|\mathbf{g}\| < \infty.$$

よって，ℓ^2 は内積 (♣) をもつ内積空間である.

$$\mathbf{e_1} = (1,0,0,\ldots),\ \mathbf{e_2} = (0,1,0,\ldots),\ldots,\mathbf{e_k} = (0,\ldots,0,\overset{k\text{ 番目}}{1},0,\ldots),\ldots$$

は, ℓ^2 に属し,

$$(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k) = \begin{cases} 1 & (j=k) \\ 0 & (j\neq k). \end{cases} \quad (j\neq k \text{ ならば直交する})$$

これより, 任意の $\mathbf{f}\in\ell^2$ は

$$\mathbf{f} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\mathbf{e}_k \quad (\text{但し } a_k = (\mathbf{f},\mathbf{e}_k))$$

と一意的に書けるので, $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$ は ℓ^2 の完全正規直交系.

ℓ^2 は無限次元の内積空間である.

2. 関数空間

$C[-\pi,\pi]$：区間 $[-\pi,\pi]$ で定義された連続関数全体の集合.

連続関数の和および実数倍もまた連続関数.

$\Longrightarrow$ $C[-\pi,\pi]$ はベクトル空間.

$f,\ g \in C[-\pi,\pi]$ に対して

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

とおくと，これは内積の定義を満たす.

$\Longrightarrow$ $C[-\pi,\pi]$ はこの内積で内積空間となる.

このとき，シュワルツの不等式

$$|(f,g)| \leqq \|f\| \cdot \|g\|$$

は次のようになる：

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx\right| \leqq \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx\right)^{1/2} \cdot \left(\int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2\,dx\right)^{1/2}.$$

なお，ℓ^2 でのシュワルツの不等式は以下のようになる：

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k\right| \leqq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2\right)^{1/2}.$$

j, k が非負整数のとき，

$$(\cos jx, \cos kx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos jx \cos kx\, dx = \begin{cases} 2\pi & (j = k = 0) \\ \pi & (j = k \geqq 1) \\ 0 & (j \neq k), \end{cases}$$

$$(\sin jx, \sin kx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin jx \sin kx\, dx = \begin{cases} \pi & (j = k \geqq 1) \\ 0 & (j \neq k), \end{cases}$$

$$(\cos jx, \sin kx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos jx \sin kx\, dx = 0.$$

$\Longrightarrow$ $\{\cos kx\}_{k=0}^{\infty}$ と $\{\sin kx\}_{k=1}^{\infty}$ を合わせたものは直交系.

$\Longrightarrow$ $C[-\pi, \pi]$ は無限次元.

もし, $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx\right\}_{k=1}^{\infty}$ と $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx\right\}_{k=1}^{\infty}$ を合わせたものが

$C[-\pi,\pi]$ の完全正規直交系であれば, 任意の $f\in C[-\pi,\pi]$ は

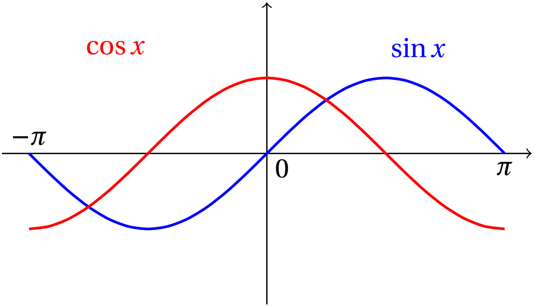
$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\quad (\text{各}\ x\in[-\pi,\pi]), \qquad (\spadesuit)$$

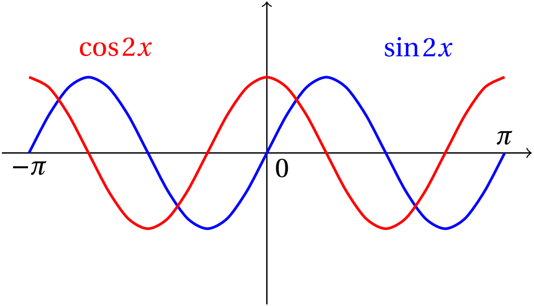
$$a_k=\frac{1}{\pi}\bigl(f,\cos kx\bigr)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx\ (k\geqq 0),$$

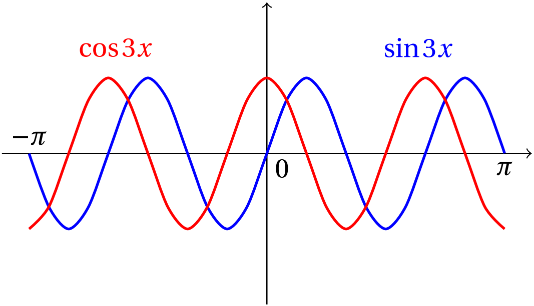
$$b_k=\frac{1}{\pi}\bigl(f,\sin kx\bigr)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx\ (k\geqq 1)$$

と書けることになる.

($\spadesuit$) の右辺は f のフーリエ級数と呼ばれる.


$\cos x$
$\sin x$
$-\pi$
0
π


$\cos 2x$
$\sin 2x$
π
$-\pi$
0

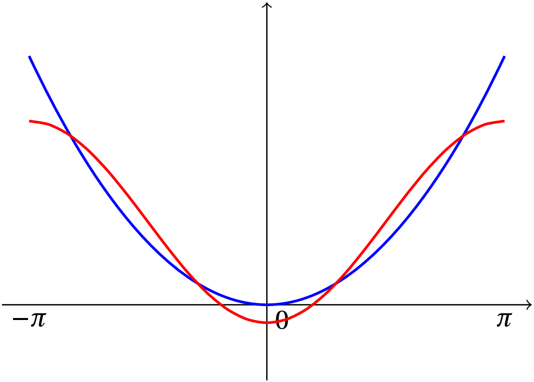

$\cos 3x$
$\sin 3x$
$-\pi$
0
π

$f(-\pi) = f(\pi)$ をみたす「滑らかな」関数 (例えば x^2, x^4 など) は (♠) の形に表すことが可能であることが知られている.

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos kx \quad (x \in [-\pi, \pi]),$$

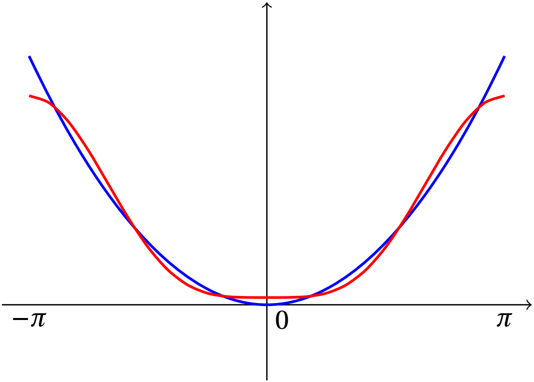
$$x^4 = \frac{\pi^4}{5} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{8\pi^2(-1)^k}{k^2} - \frac{48(-1)^k}{k^4} \right) \cos kx \quad (x \in [-\pi, \pi]).$$

$\frac{x^2}{3}$ のフーリエ級数による近似



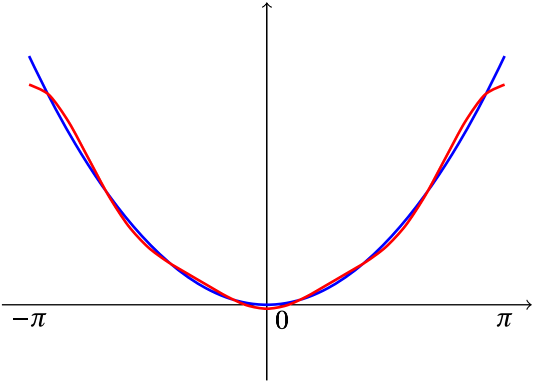
$$\frac{\pi^2}{9} - \frac{4}{3}\cos x$$

$\frac{\mathbf{x}^2}{3}$ のフーリエ級数による近似



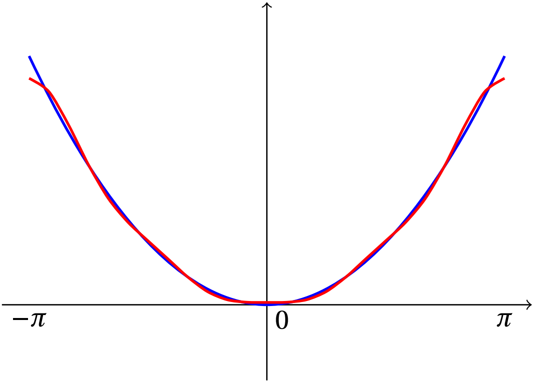
$$\frac{\pi^2}{9} - \frac{4}{3}\cos x + \frac{1}{3}\cos 2x$$

$\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{3}}$ のフーリエ級数による近似



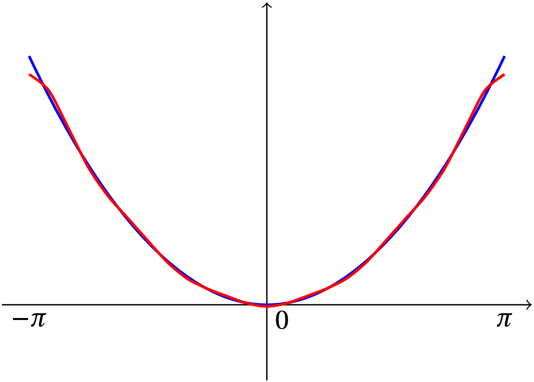
$$\frac{\pi^2}{9} - \frac{4}{3}\cos x + \frac{1}{3}\cos 2x - \frac{4}{27}\cos 3x$$

$\frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{3}}$ のフーリエ級数による近似



$$\frac{\pi^2}{9}-\frac{4}{3}\cos x+\frac{1}{3}\cos 2x-\frac{4}{27}\cos 3x+\frac{1}{12}\cos 4x$$

$\frac{\mathbf{x}^2}{3}$ のフーリエ級数による近似



$$\frac{\pi^2}{9} - \frac{4}{3}\cos x + \frac{1}{3}\cos 2x - \frac{4}{27}\cos 3x + \frac{1}{12}\cos 4x - \frac{4}{75}\cos 5x$$

$f(-\pi) = f(\pi)$ をみたす「滑らかな」関数 (例えば x^2, x^4 など) は (♠) の形に表すことが可能であることが知られている.

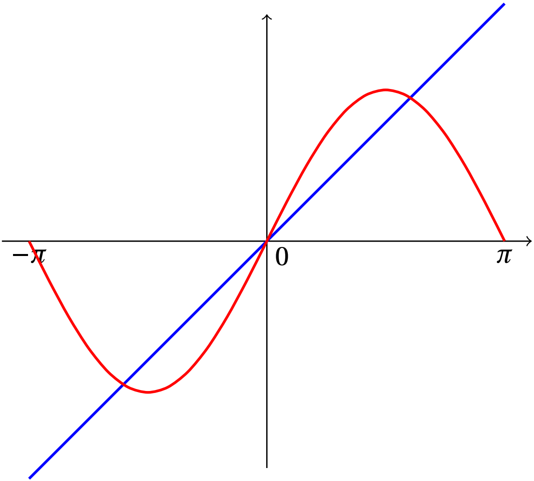
$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos kx \quad (x \in [-\pi, \pi]),$$

$$x^4 = \frac{\pi^4}{5} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{8\pi^2(-1)^k}{k^2} - \frac{48(-1)^k}{k^4} \right) \cos kx \quad (x \in [-\pi, \pi]).$$

$x = \pi$ を代入して整理すると ($\cos k\pi = (-1)^k$ なので)

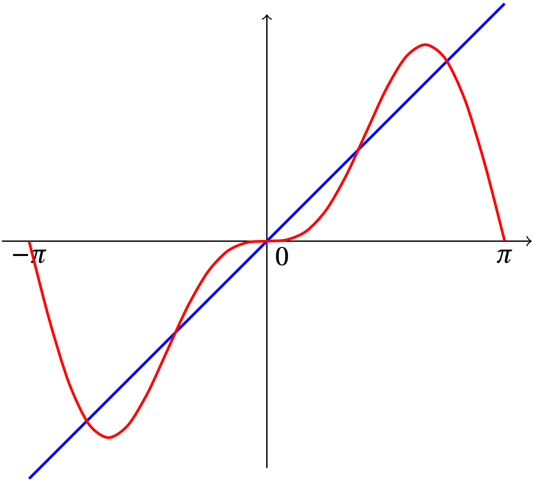
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

x のフーリエ級数による近似



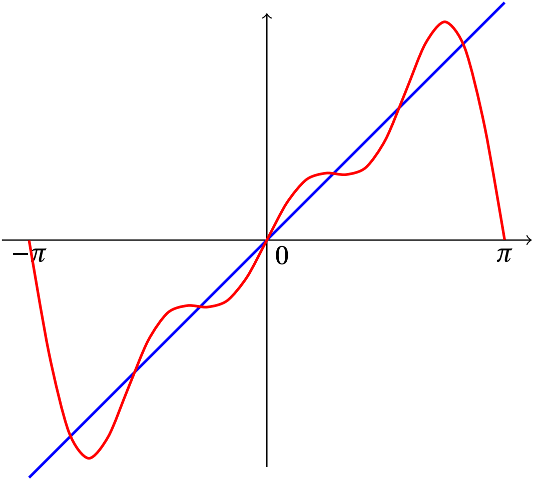
$$2\sin x$$

x のフーリエ級数による近似



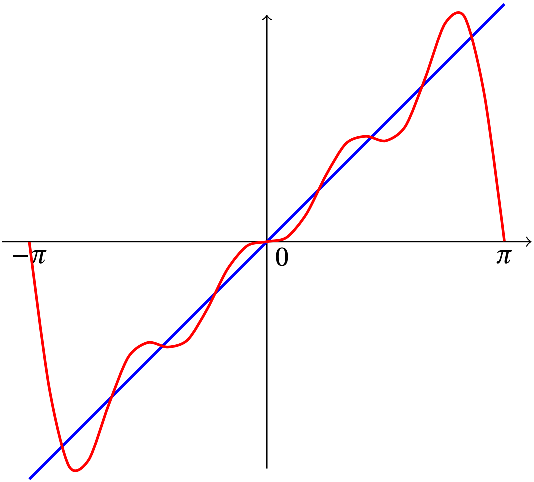
$$2\sin x - \sin 2x$$

xのフーリエ級数による近似



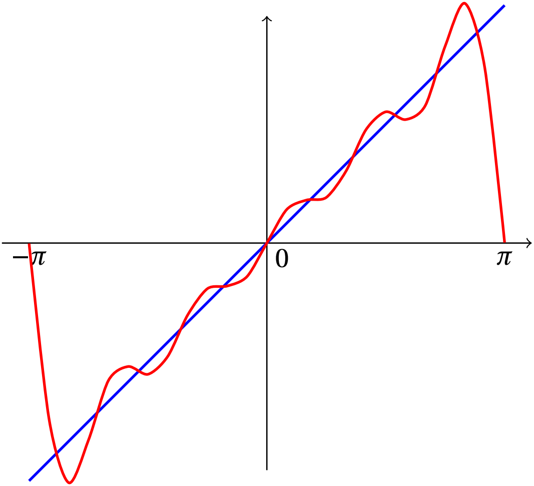
$$2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x$$

xのフーリエ級数による近似



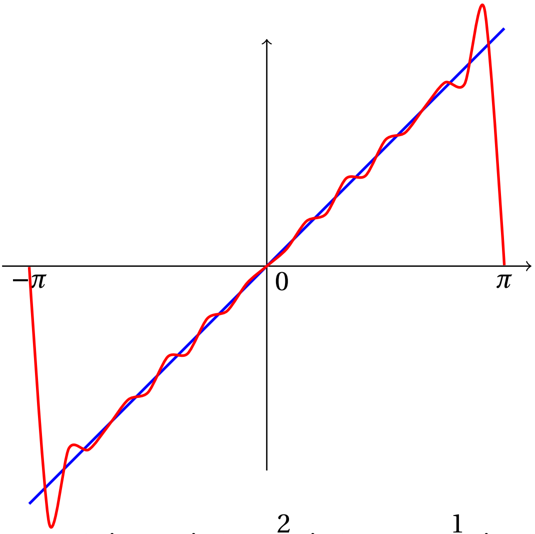
$$2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin 4x$$

x のフーリエ級数による近似



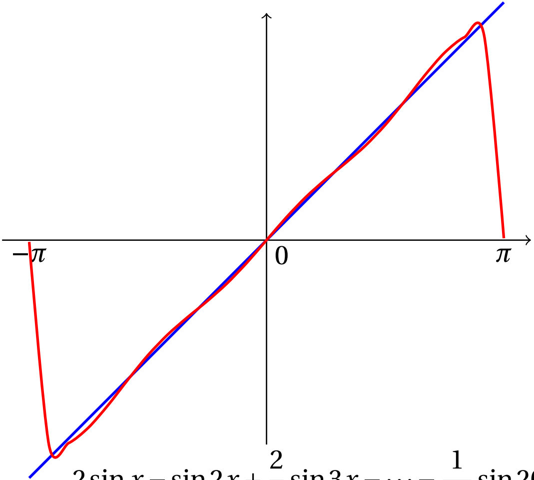
$$2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{2}{5}\sin 5x$$

x のフーリエ級数による近似



$$2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \cdots - \frac{1}{5}\sin 10x$$

xのフーリエ級数による近似



$$2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \cdots - \frac{1}{10}\sin 20x$$

$C[-\pi,\pi]$ を内積を用いて完備化した空間を $L^2(-\pi,\pi)$ で表す.

$$C[-\pi,\pi] \subset L^2(-\pi,\pi) = \left\{ f \;\middle|\; \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx \text{ が有限} \right\}.$$

$L^2(-\pi,\pi)$ の任意の関数は**ある意味で**

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}(f, \cos kx) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \quad (k \geqq 0),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}(f, \sin kx) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \quad (k \geqq 1)$$

と一意的に表すことが出来る.

$\Longrightarrow$ $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx\right\}_{k=1}^{\infty}$ と $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx\right\}_{k=1}^{\infty}$ を合わせたものは $L^2(-\pi,\pi)$ の完全正規直交系である.

私の研究について

ベクトルの大きさが定義された無限次元ベクトル空間 (Banach 空間) という舞台で，抽象的な常微分方程式の解の存在・一意性などの研究および，その結果の具体的な偏微分方程式への応用を行っています.

私の研究について

熱の伝導

波の伝播

化学物質の反応

生物の個体数変化

$\vdots$

$\Longrightarrow$ 偏微分方程式で記述される

$\Downarrow$

抽象的な常微分方程式として表すことが出来る

例

長さ π の針金の両端 $x=0$ と $x=\pi$ において温度を 0 度に保つ.

時刻 $t=0$ の針金の温度分布を $u_0(x)$ とする.

時刻 t, 場所 x の温度 $u(x,t)$ はつぎの微分方程式を満たす:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad 0<x<\pi,\ t>0, \\
&u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\
&u(x,0) = u_0(x).
\end{aligned}
\tag{HE}
$$

t を固定すると $u(x,t)$ は x の関数. 例えば $u(\cdot,t) \in L^2(0,\pi)$ とする.

対応 $t \mapsto u(\cdot,t)$ を $[0,\infty)$ で定義された $L^2(0,\pi)$ に値を取る t の関数と見なすことが出来る. この関数を $u(t)$ と表すことにする.

$L^2(0,\pi)$ における写像 A を

$$[Av](x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x), \quad D(A) = \left\{ v \in L^2(0,\pi) \mid v(0) = v(\pi) = 0 \right\}$$

で定義すると，(HE) は無限次元空間 $L^2(0,\pi)$ における常微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{CP}$$

に書き換えることが出来る．

この解は「指数関数」を用いて $u(t) = e^{tA}u_0$ と表すことが出来る．

今の場合は，e^x の満たす関係式

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}$$

と類似の式

$$e^{tA} = \lim_{n\to\infty}\left(I-\frac{tA}{n}\right)^{-n} \qquad \text{(指数公式)}$$

を用いて「指数関数」を定義することで，(HE) の解を得ることが出来る．

様々な偏微分方程式に対して「指数関数」を定義することを目指して，研究をしています．

「指数関数」について興味をお持ちの方は，バックナンバーにある第 108 話の田中先生のスライドも参照してみてください．