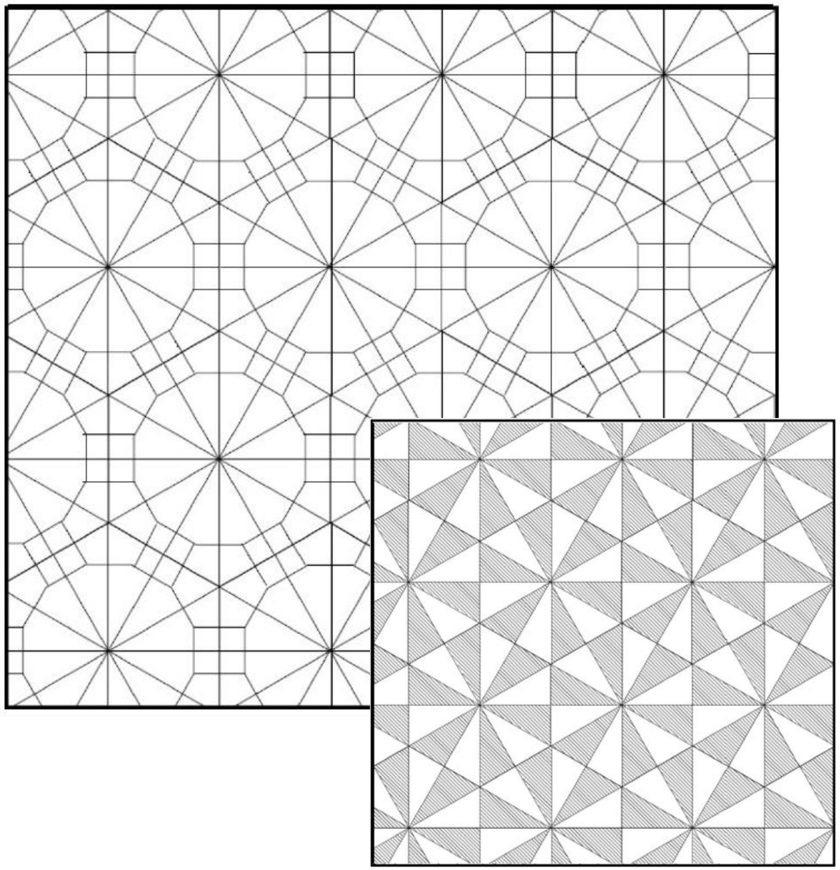
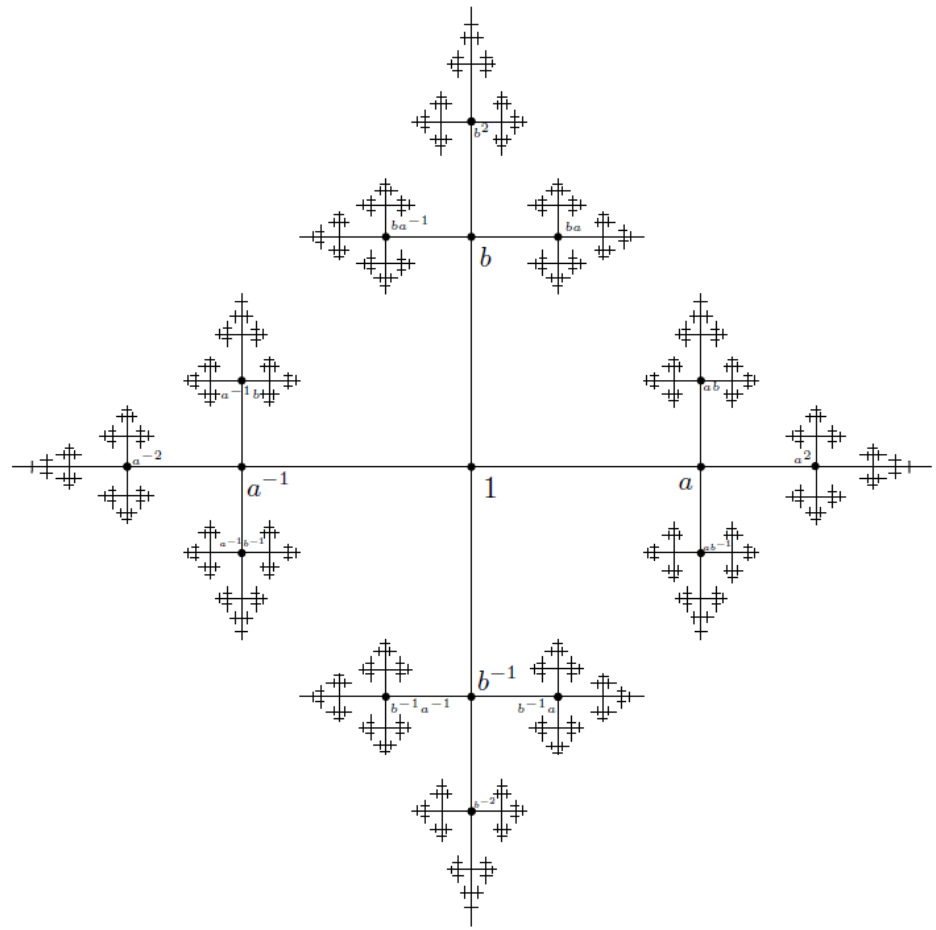
三角形の鏡映による敷き詰めから
コクセター群へ





静岡大学 理学部 数学科　保坂哲也

M.C.エッシャーの絵「円の極限IV 天国と地獄」では、
「天使」と「悪魔」が鏡映の敷き詰めとして描かれています。

このフラクタルのような独特な絵はどのような規則性で
描かれているのか？

これを今回のひとつの目標に、このことにまつわる数学を
ご紹介したいと思います。

準備 「曲率」とは？

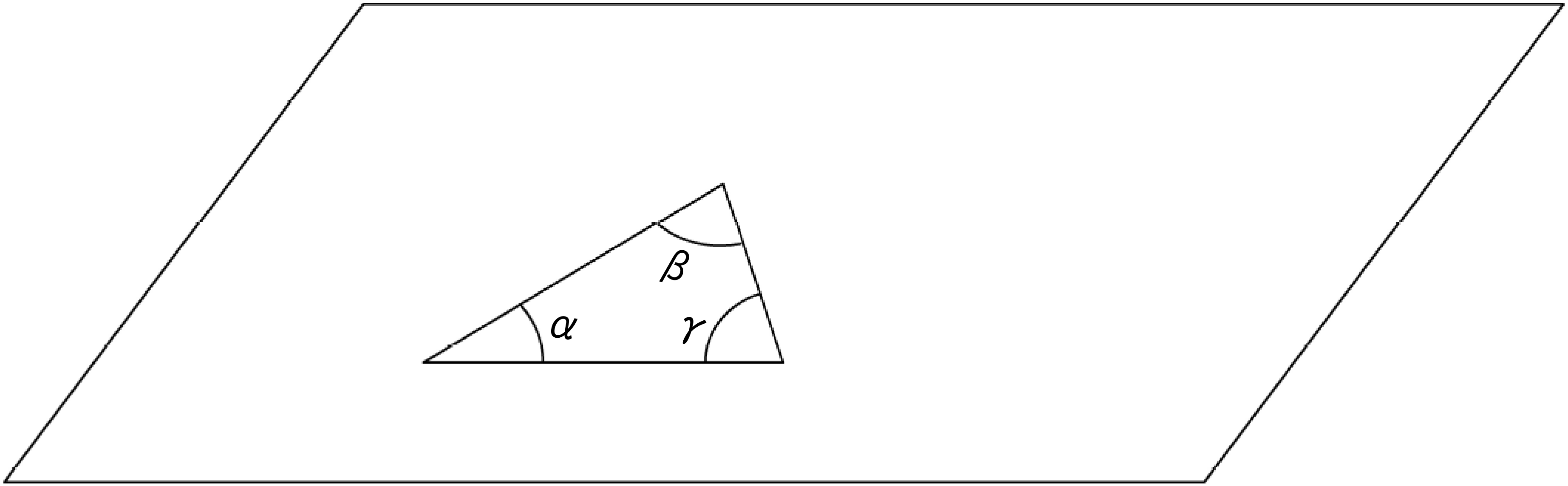
- 考えている空間（世界）の曲がり具合を「曲率」といいます。

- 例えば、三角形を考えたときに常に内角の和が180°（＝π）になる空間をユークリッド空間という。この空間の曲率 は０（平らな空間）と考える。

- もしも三角形の内角の和が180°（＝π）よりも常に大きいときはその空間の曲率は正と考える。

- もしも三角形の内角の和が180°（＝π）よりも常に小さいときはその空間の曲率は負と考える。

ユークリッド平面の三角形



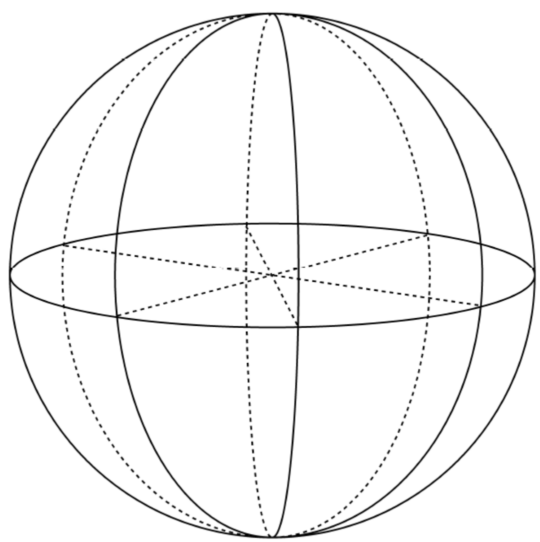
$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

（三角形の内角の和は180°）

→ このとき「曲率＝0」

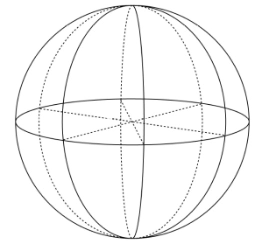
球面の三角形

球面（例えば地球儀）の上に三角形を描いてみると
三角形の内角の和は 180°（＝π）よりも大きいことが
わかる。
したがって、球面（地球儀）という空間の曲率は
0 よりも大きい正の値をとる。

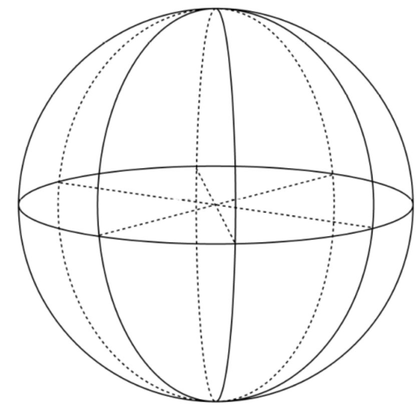


球面の曲率について

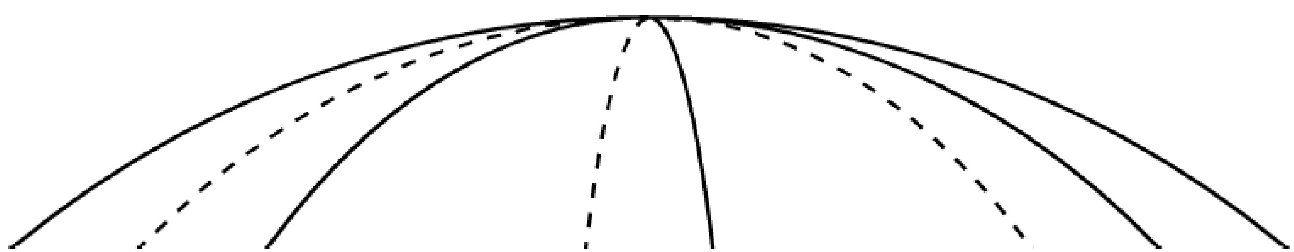
半径１の球面の曲率は 1



半径２の球面の曲率は 1/2



半径が大きくなるにつれ球面の曲率（曲がり具合）は
小さく０ に近づいていく
(例 : 地球）



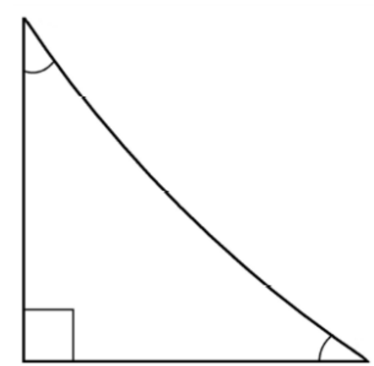
負の曲率と双曲平面

三角形の内角の和が180°（＝π）よりも常に小さくなるときその空間の曲率は負となる。

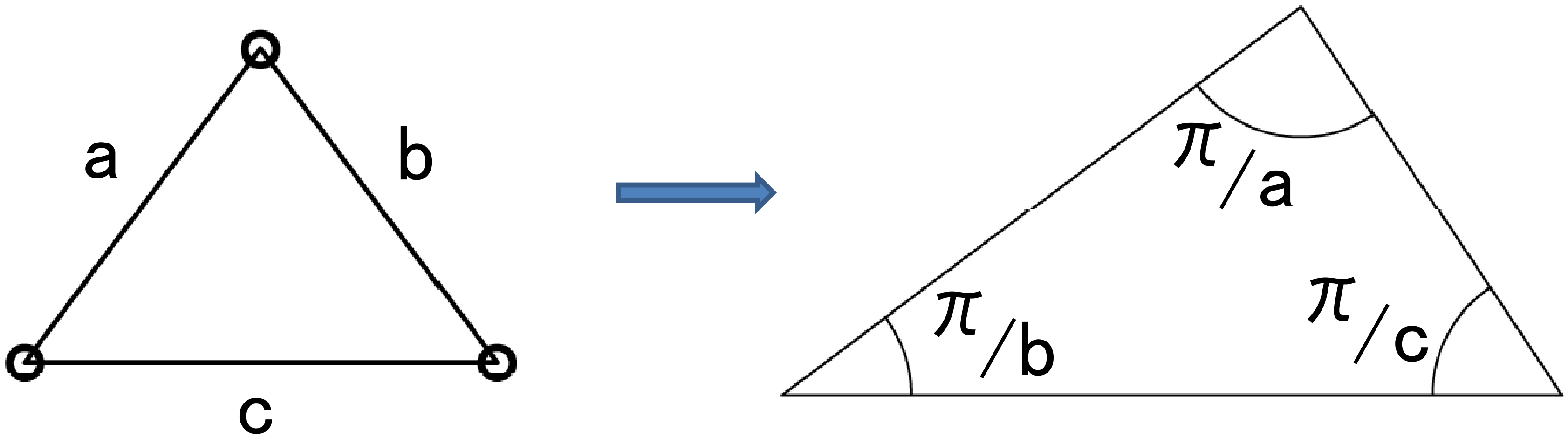
このときの三角形は、球面に描かれる太った三角形とは逆に、やせた細長い三角形になります。

一定の負の曲率を持つ平面を「双曲平面」とよびます。

負の曲率の双曲平面はどのような空間（世界）なのか あとでご紹介します。



ダイアグラムと三角形

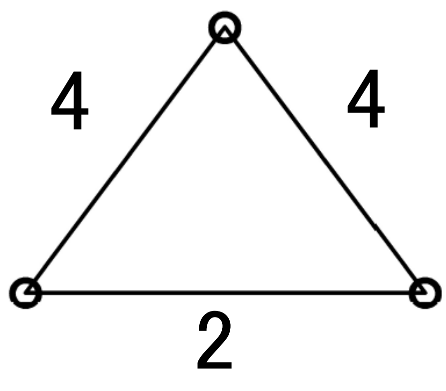


左の図のようなダイアグラムを考える
（ここで a,b,c は2以上の自然数とする）
左の図のダイアグラムに対して、
右の図のような角度を持つ三角形を対応させる

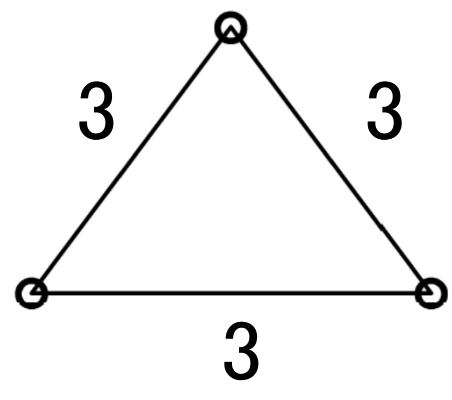
三角形の鏡映による敷き詰め１

$^{\pi}/_{a} + {}^{\pi}/_{b} + {}^{\pi}/_{c} = \pi$　のとき

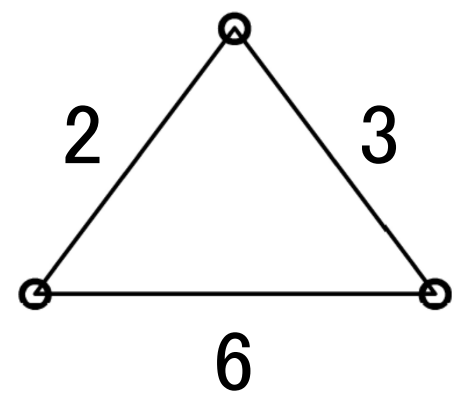
このとき 三角形の内角の和は 180°（＝π）
曲率０のユークリッド平面に三角形は描くことができる



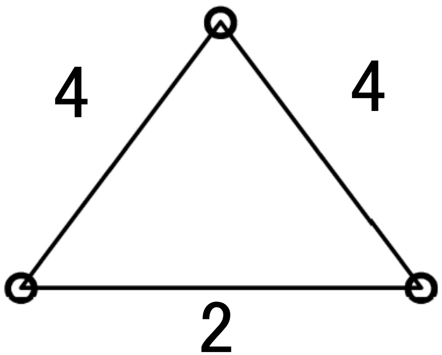
$^{\pi}/_{4} + {}^{\pi}/_{4} + {}^{\pi}/_{2} = \pi$



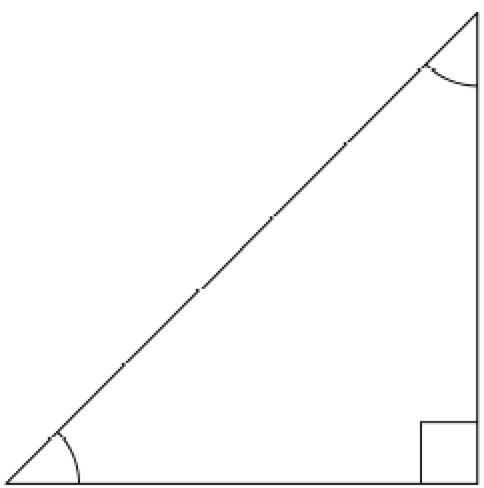
$^{\pi}/_{3} + {}^{\pi}/_{3} + {}^{\pi}/_{3} = \pi$

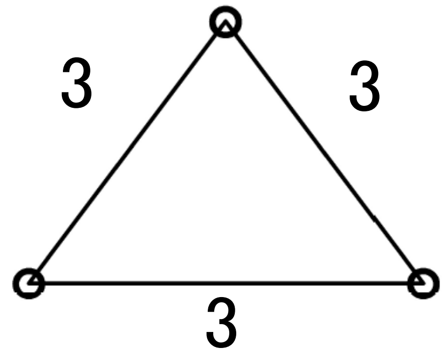


$^{\pi}/_{2} + {}^{\pi}/_{3} + {}^{\pi}/_{6} = \pi$

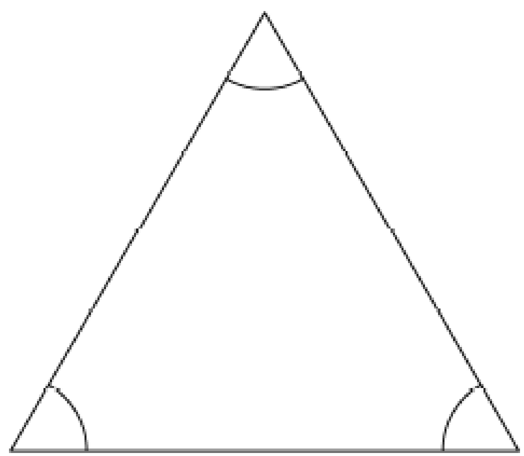


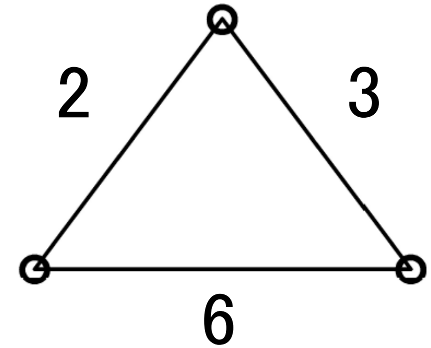
$$\pi/4 + \pi/4 + \pi/2 = \pi$$



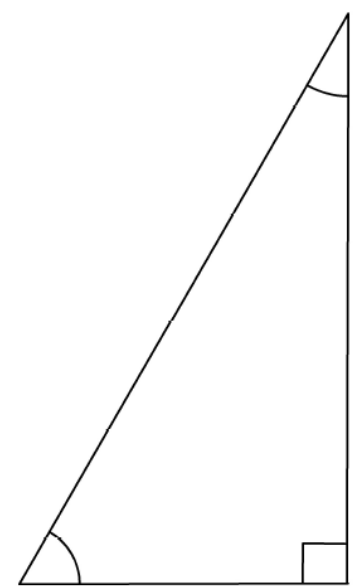


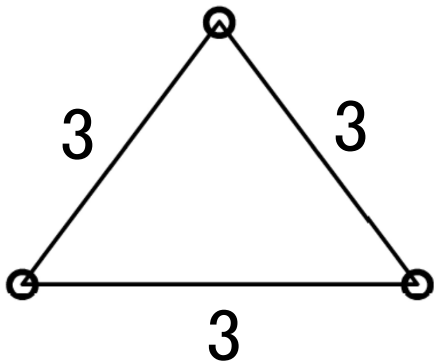
$$\pi/3 + \pi/3 + \pi/3 = \pi$$

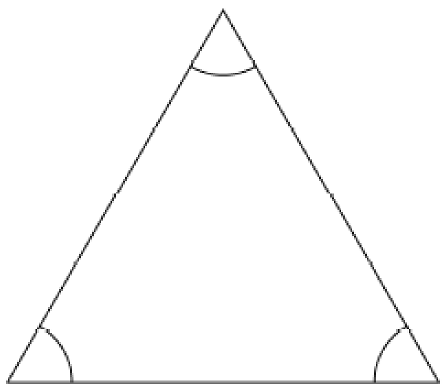




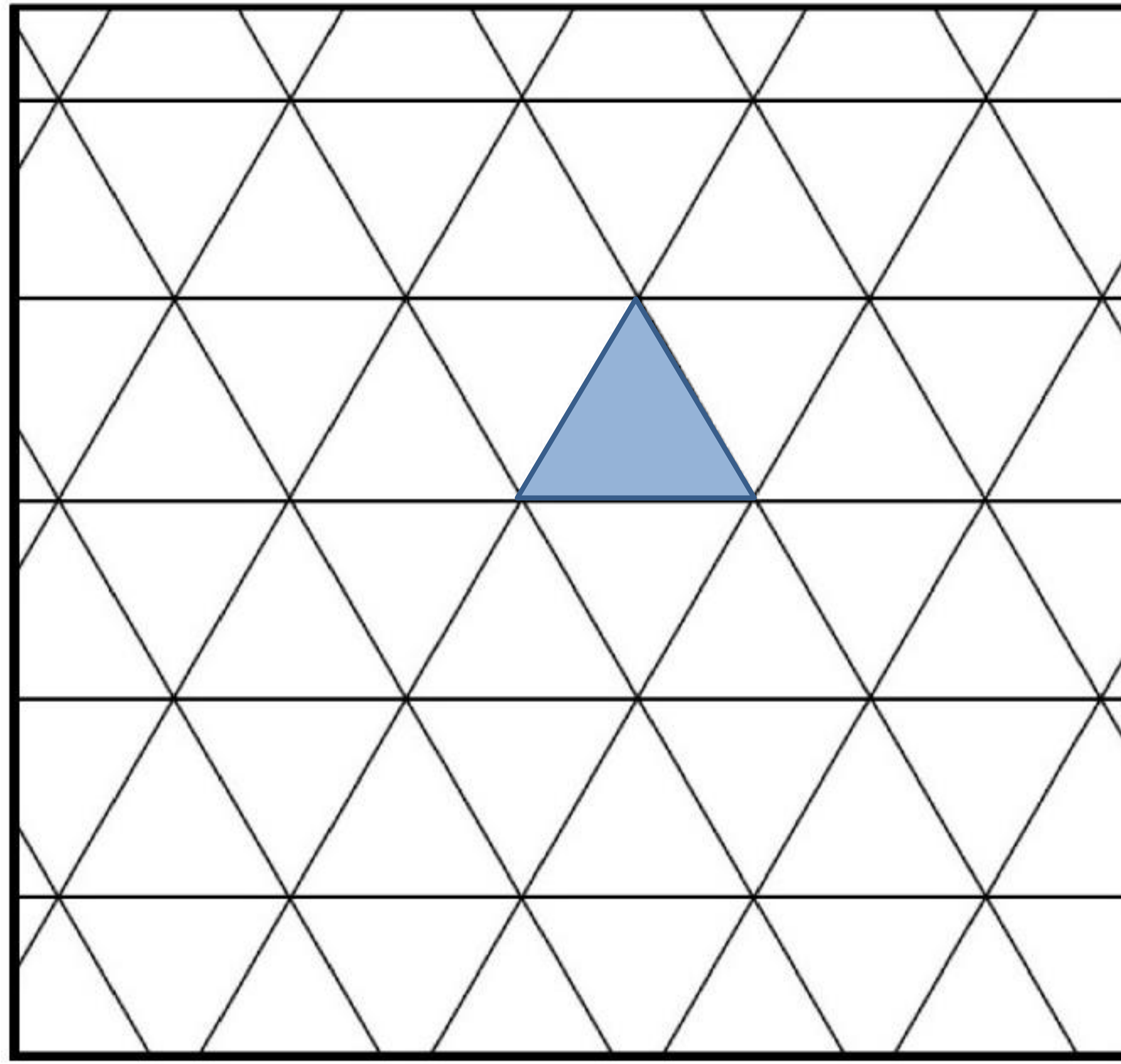
$$\pi/2 + \pi/3 + \pi/6 = \pi$$

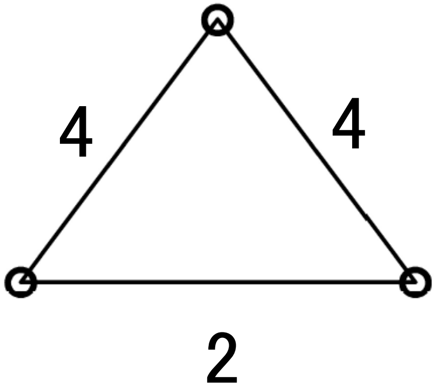


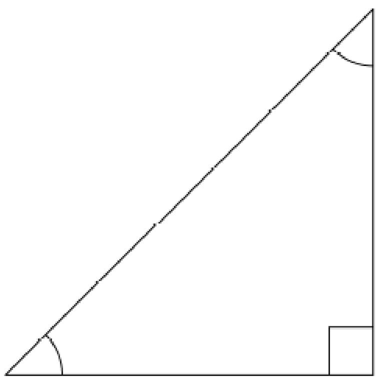




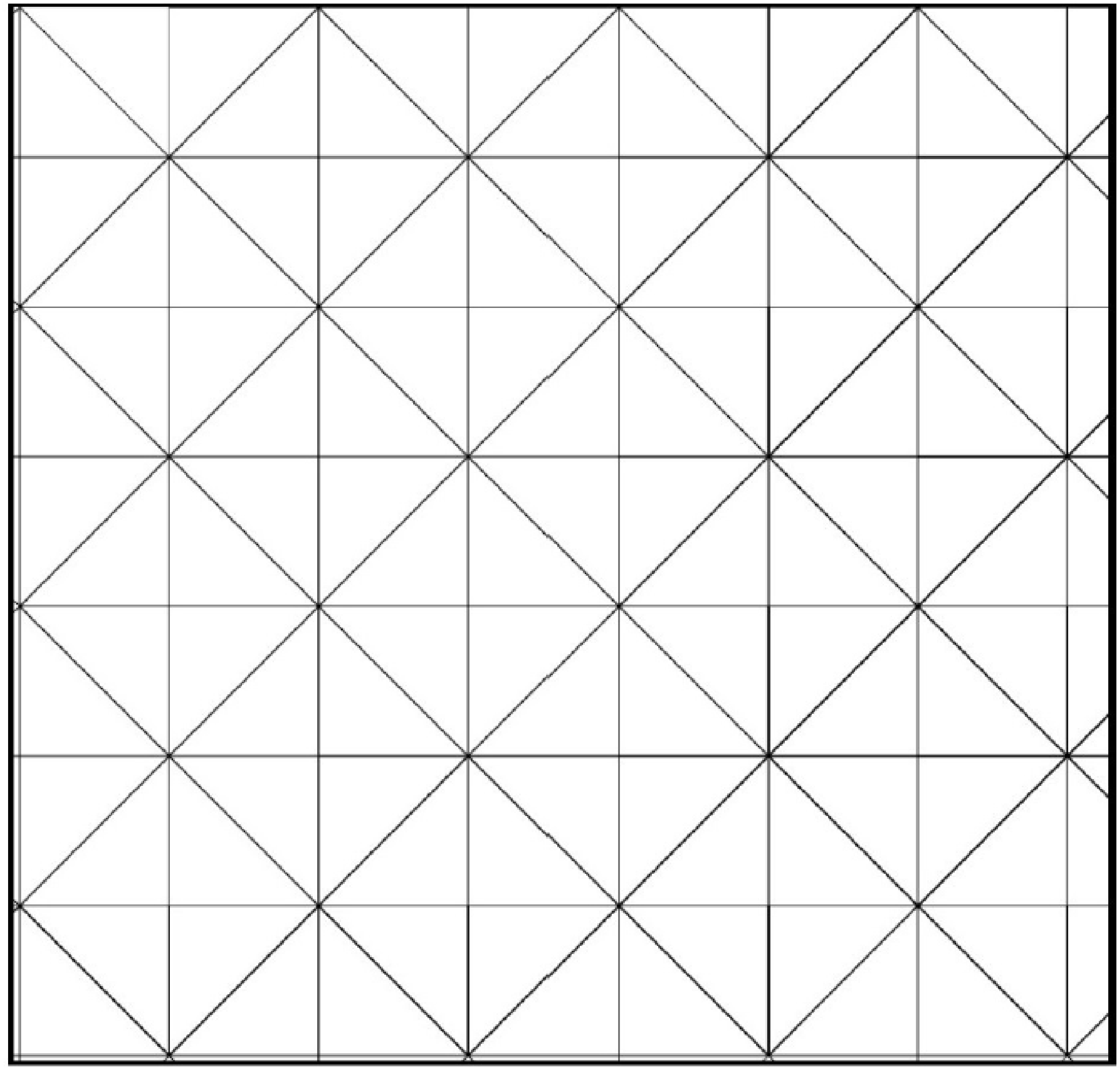
$$\pi/_3 + \pi/_3 + \pi/_3 = \pi$$

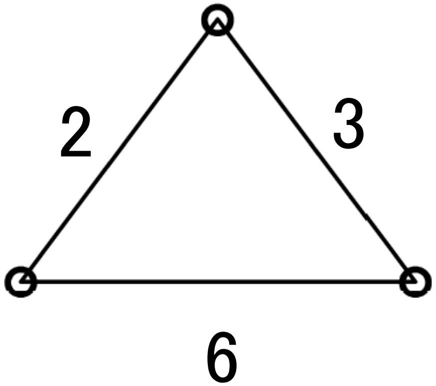


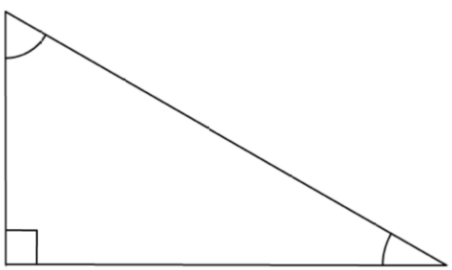




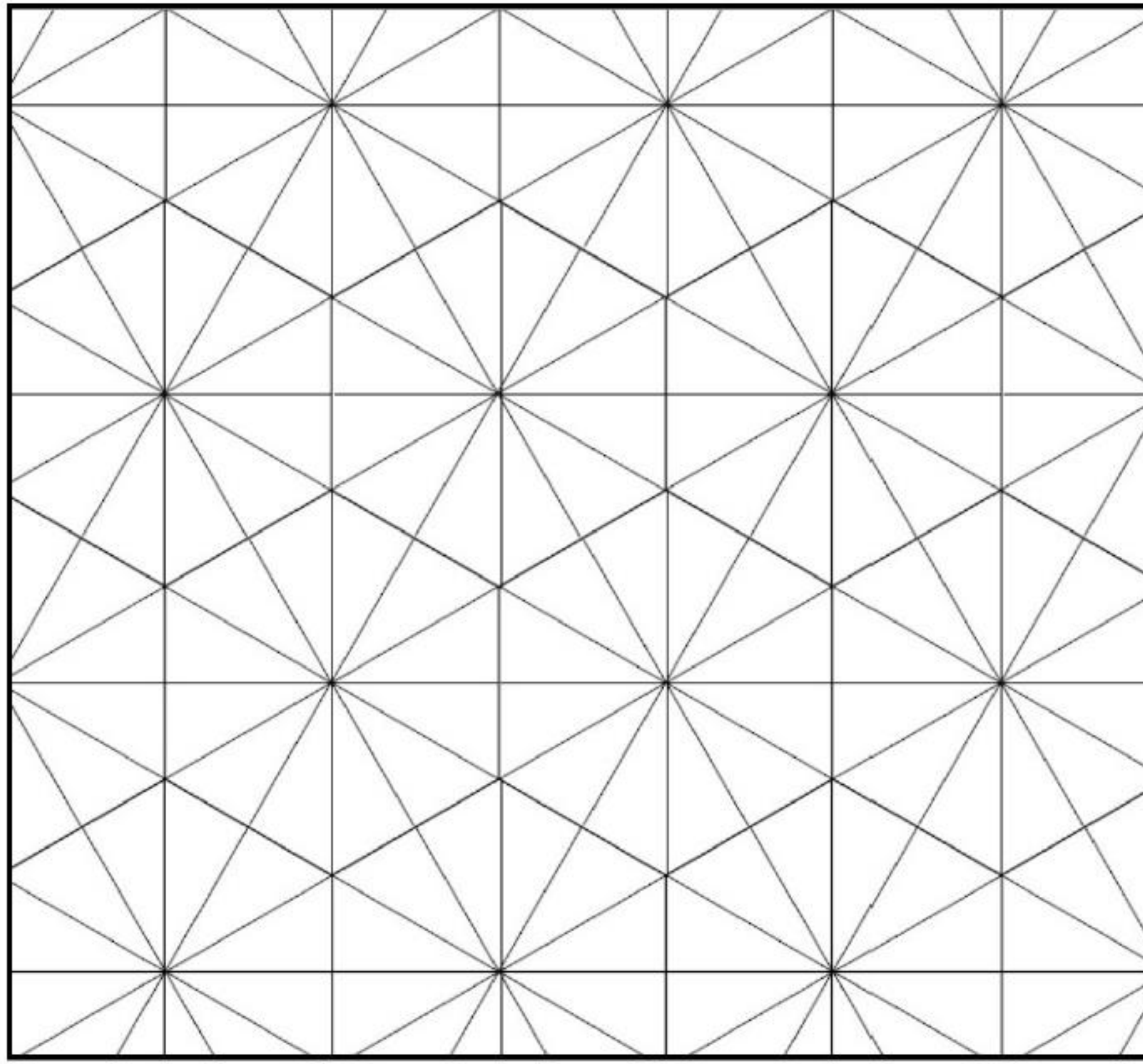
$$\pi/_4 + \pi/_4 + \pi/_2 = \pi$$







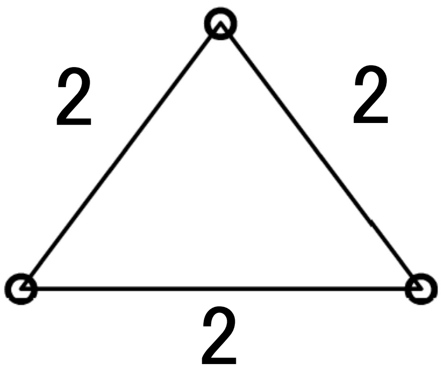
$$\pi/_2 + \pi/_3 + \pi/_6 = \pi$$



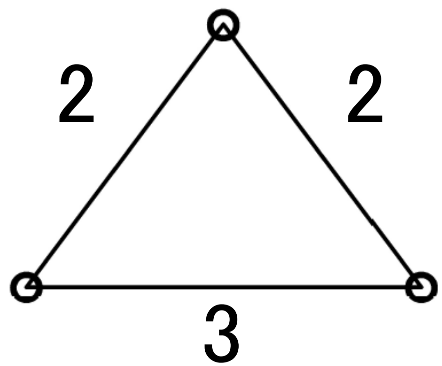
三角形の鏡映による敷き詰め２

$$\pi/_a + \pi/_b + \pi/_c > \pi \quad \text{のとき}$$

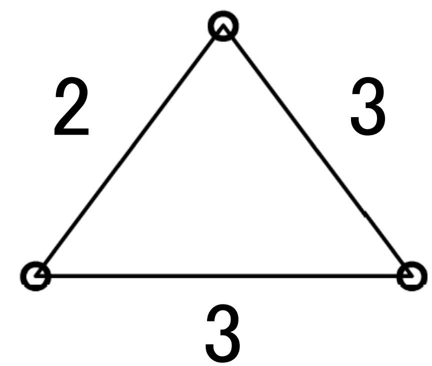
このとき 三角形の内角の和は 180°（＝π）よりも大きい
正の曲率の球面に三角形を描くことができる



$$\pi/_2 + \pi/_2 + \pi/_2 > \pi$$

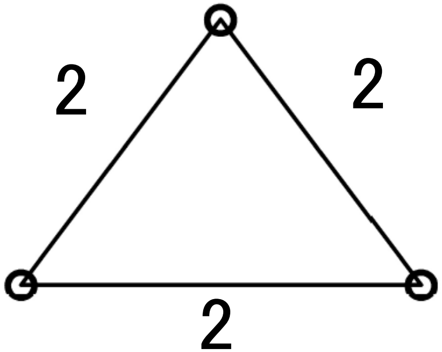


$$\pi/_2 + \pi/_2 + \pi/_3 > \pi$$

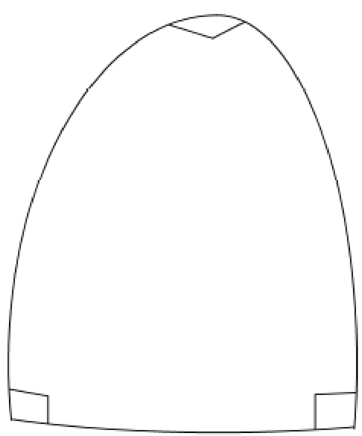


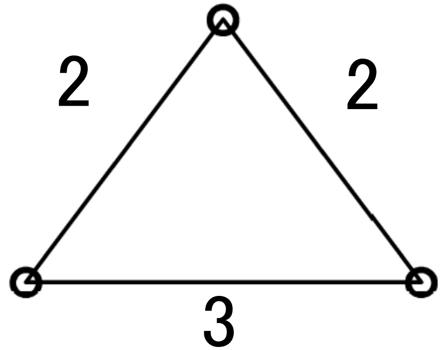
$$\pi/_2 + \pi/_3 + \pi/_3 > \pi$$

など

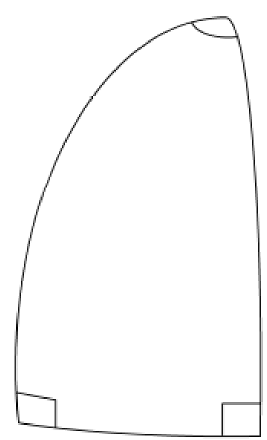


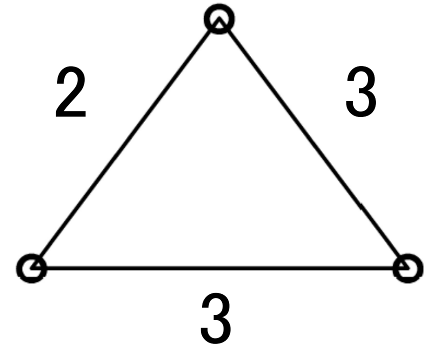
$$\pi/_2 + \pi/_2 + \pi/_2 > \pi$$



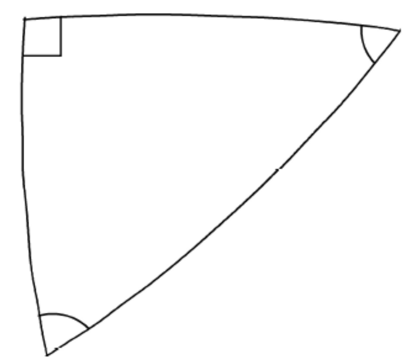


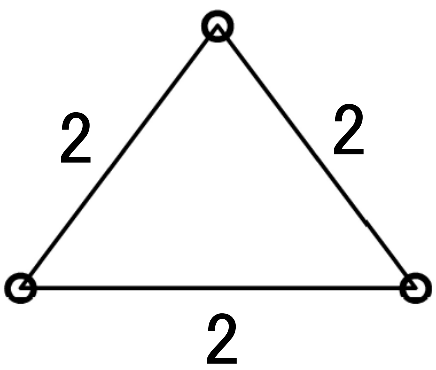
$$\pi/_2 + \pi/_2 + \pi/_3 > \pi$$

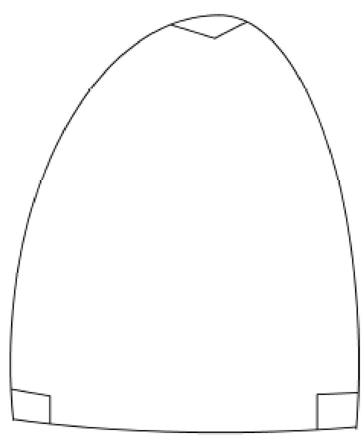




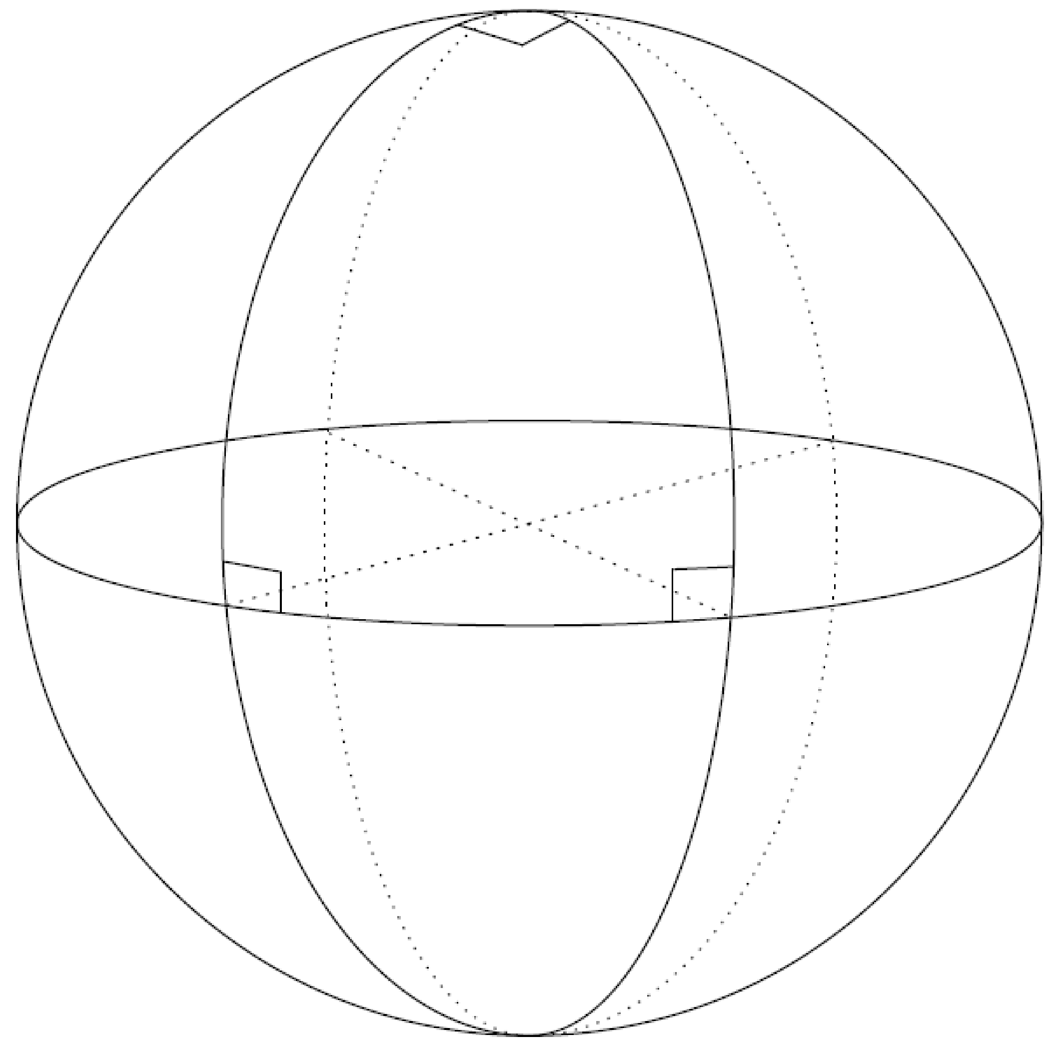
$$\pi/_2 + \pi/_3 + \pi/_3 = \pi$$

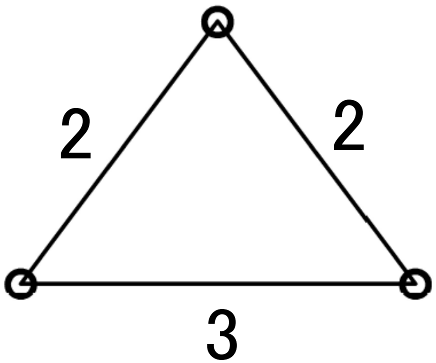


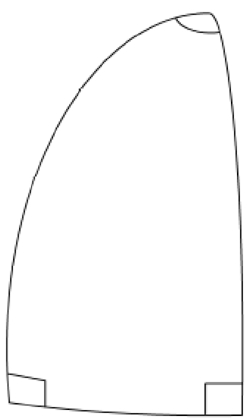




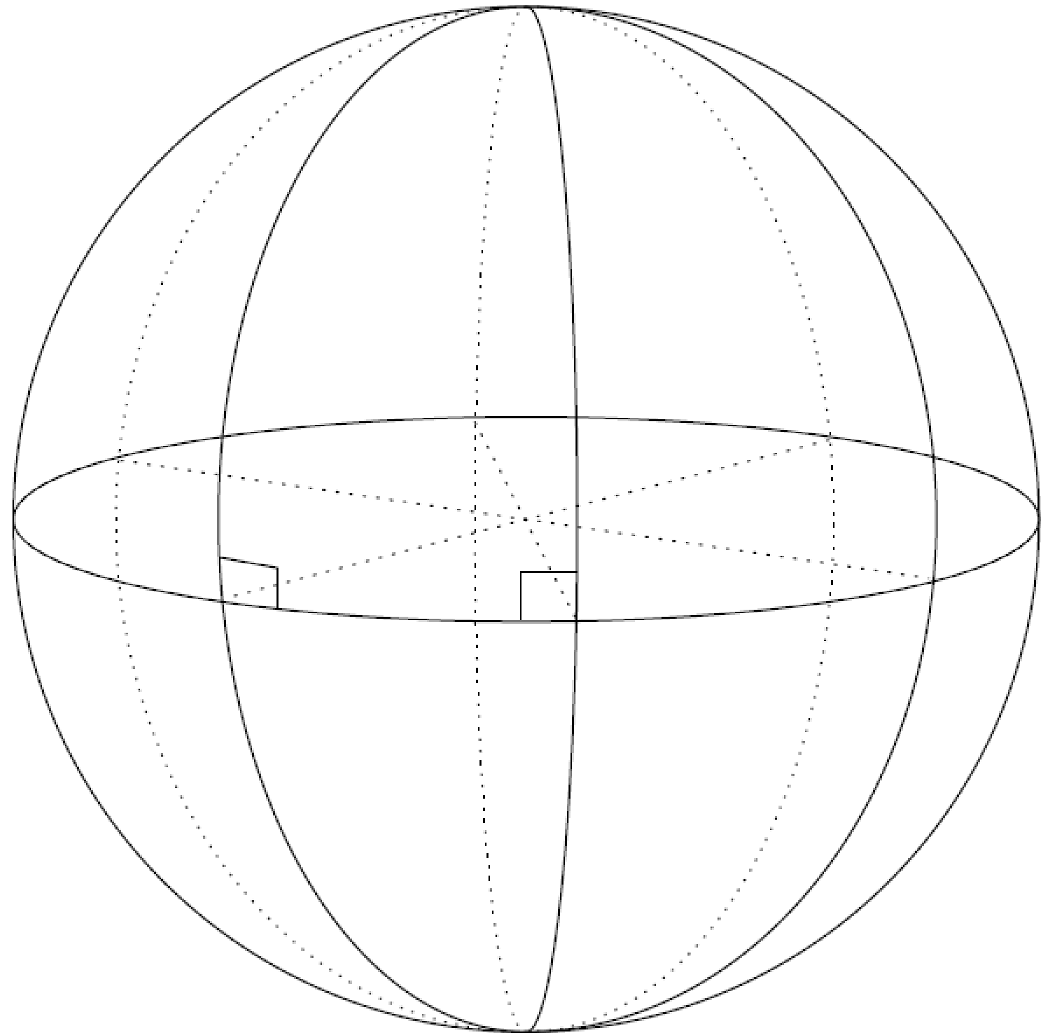
$$\pi/_{2} + \pi/_{2} + \pi/_{2} > \pi$$

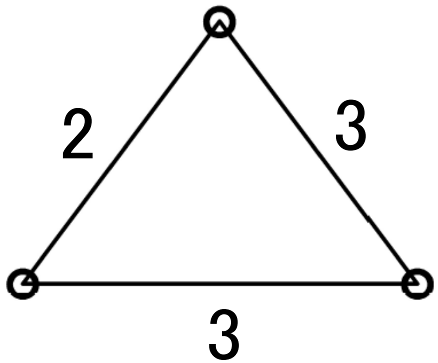


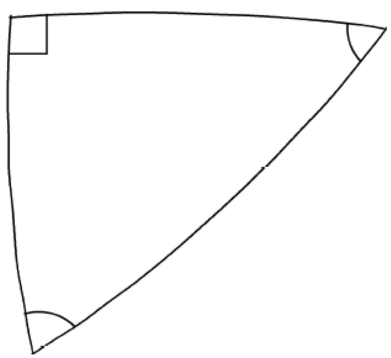




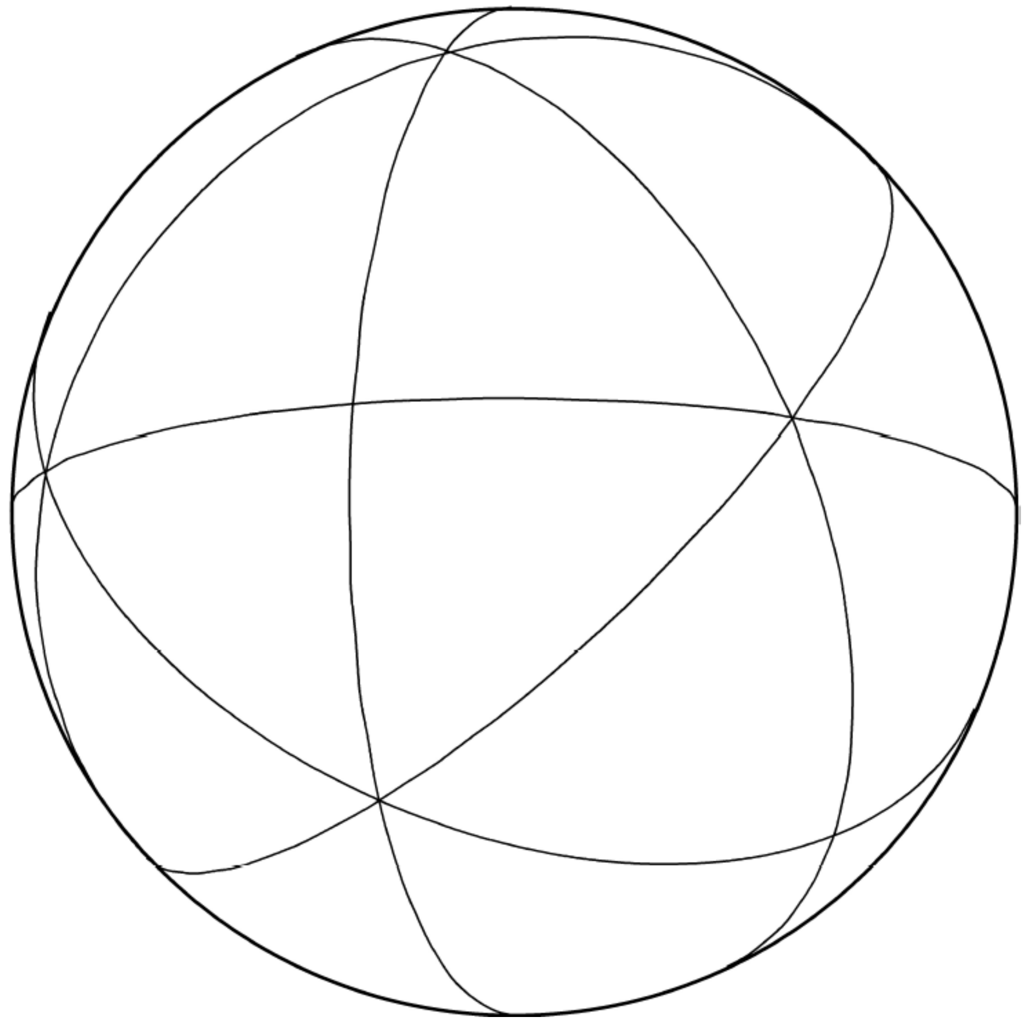
$$\pi/2 + \pi/2 + \pi/3 > \pi$$







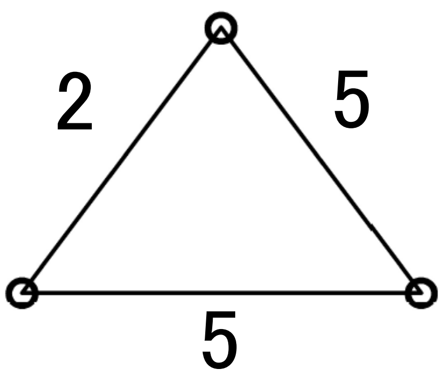
$$\pi/_2 + \pi/_3 + \pi/_3 > \pi$$



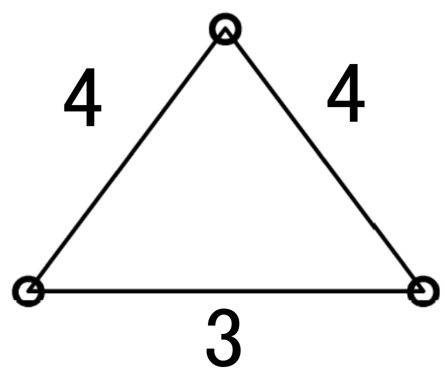
三角形の鏡映による敷き詰め３

$$\pi/_{a} + \pi/_{b} + \pi/_{c} < \pi$$ 　のとき

このとき 対応する三角形の内角の和は 180°（＝π）より
も小さい細長い三角形になる
負の曲率の「双曲平面」に三角形を描くことができる

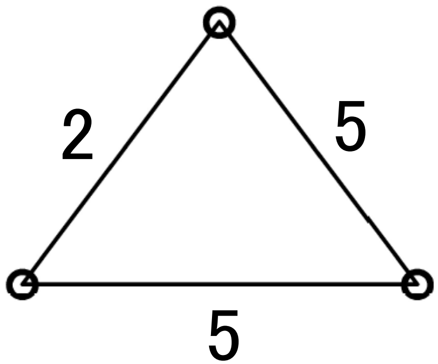


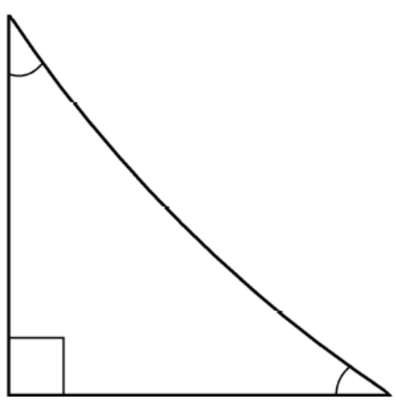
$\pi/_{2} + \pi/_{5} + \pi/_{5} < \pi$



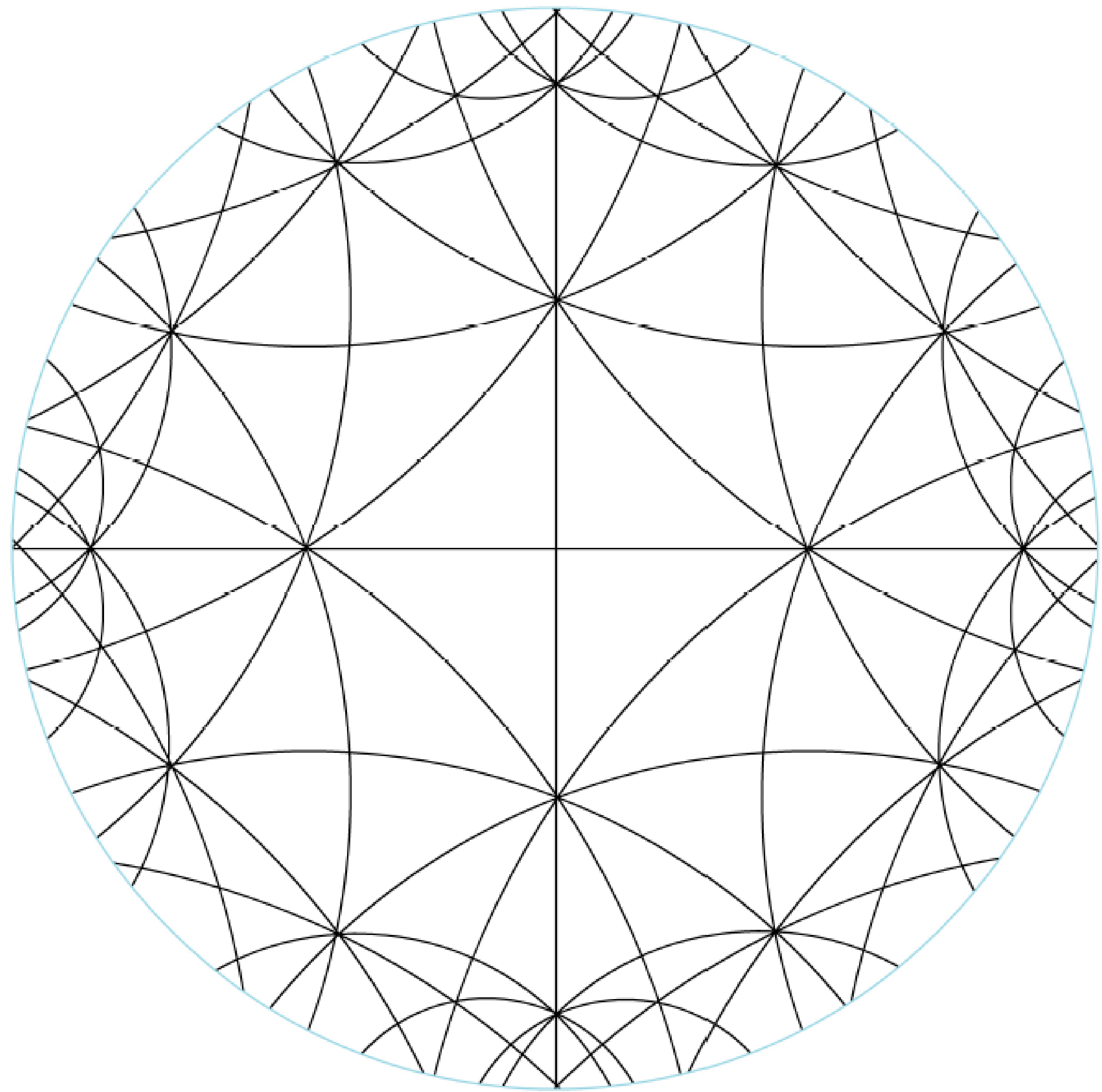
$\pi/_{4} + \pi/_{4} + \pi/_{3} < \pi$

などなど

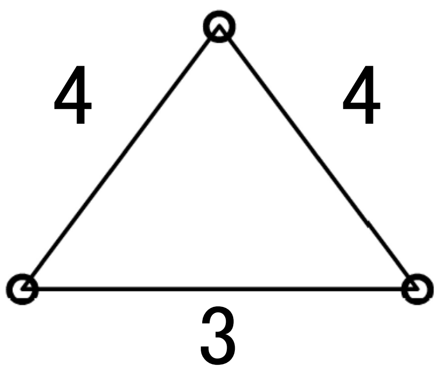




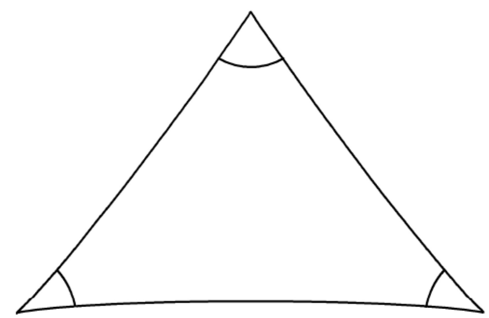
$${}^{\pi}/_{2} + {}^{\pi}/_{5} + {}^{\pi}/_{5} < \pi$$



エッシャーの絵「円の極限IV 天国と地獄」では、
内角の和が 180°（＝ π ）よりも小さい三角形として
「天使」と「悪魔」が負の曲率の双曲平面に
鏡映の敷き詰めとして描かれている



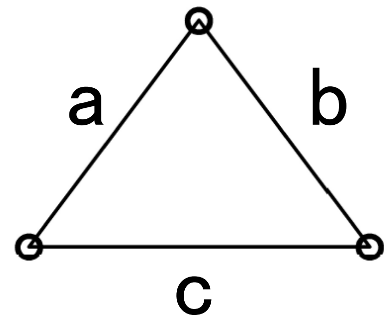
$$\pi/_4 + \pi/_4 + \pi/_3 < \pi$$



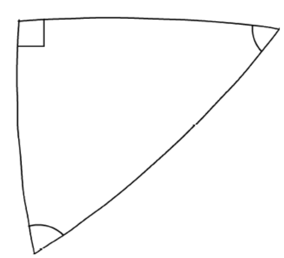
まとめ1

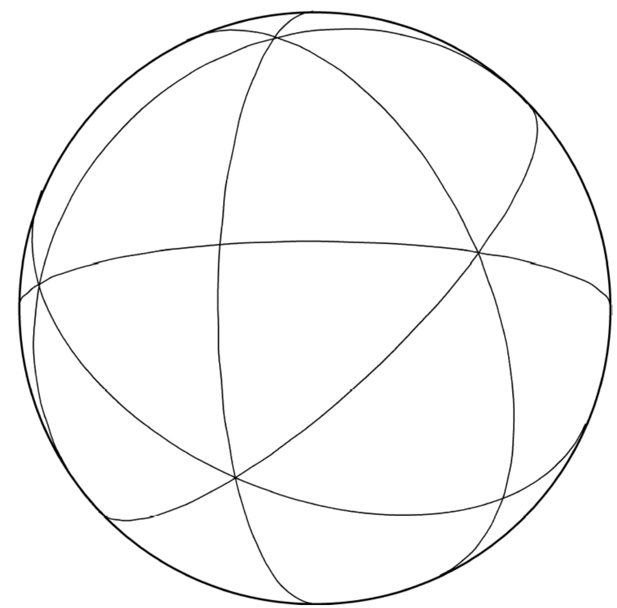
$$\pi/a + \pi/b + \pi/c > \pi$$

のとき



（1）対応する三角形の内角の和は 180°（= π)よりも大きい
（2）正の曲率の球面に三角形を描くことができる
（3）球面に鏡映で三角形の敷き詰めが描ける
（4）三角形の数は有限
（5）「球面的」とよばれる

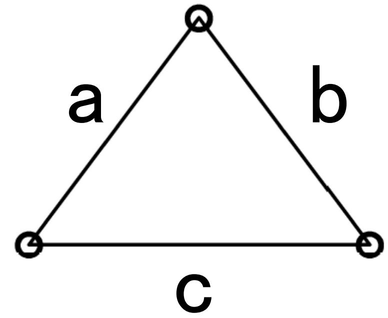




まとめ2

$$\pi/_{a} + \pi/_{b} + \pi/_{c} = \pi$$

のとき



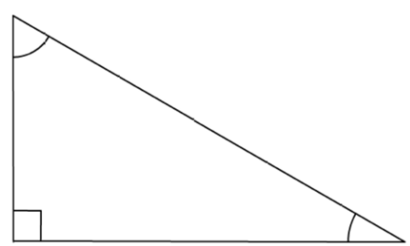
（1）対応する三角形の内角の和は 180°（= π)

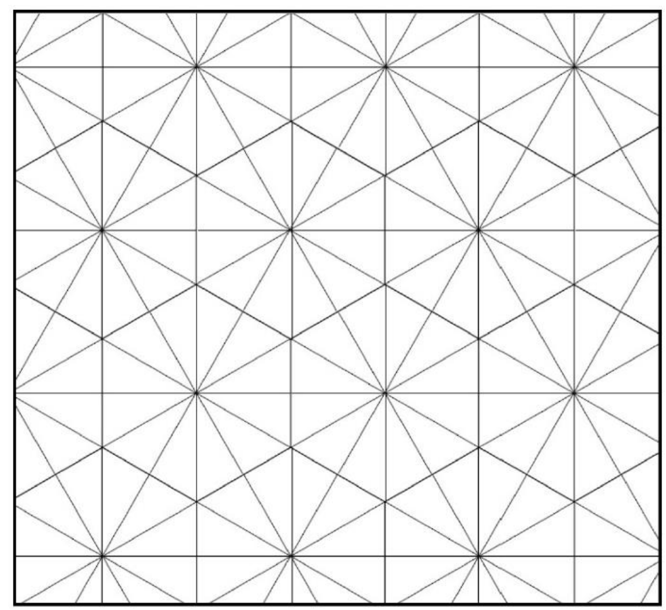
（2）曲率0のユークリッド平面に三角形を描くことができる

（3）ユークリッド平面に鏡映で三角形の敷き詰めが描ける

（4）三角形の数は無限で増加率は多項式的増加

（5）「ユークリッド的」とよばれる

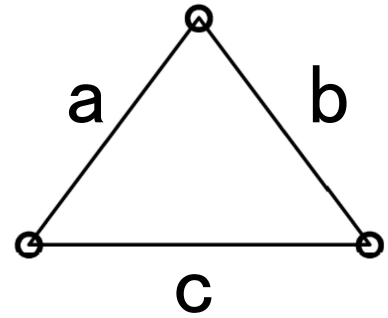




まとめ3

$$\pi/_a + \pi/_b + \pi/_c < \pi$$

のとき



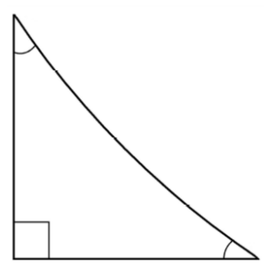
（1）対応する三角形の内角の和は 180°（= π) より小さい

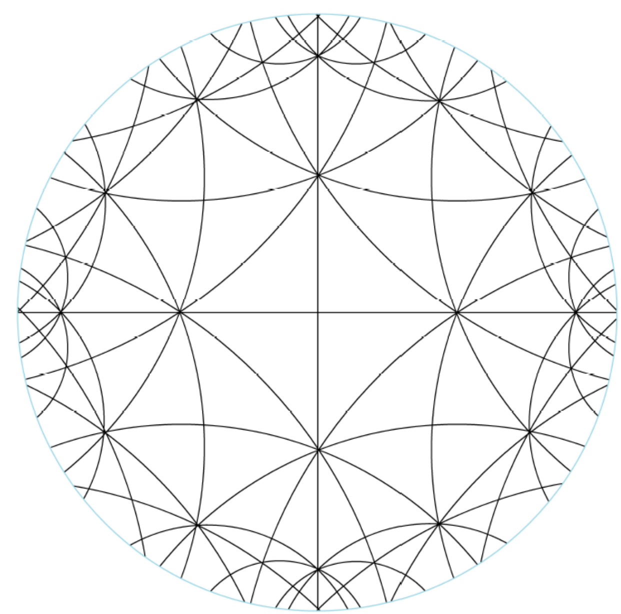
（2）負の曲率の双曲平面に三角形を描くことができる

（3）双曲平面に鏡映で三角形の敷き詰めが描ける

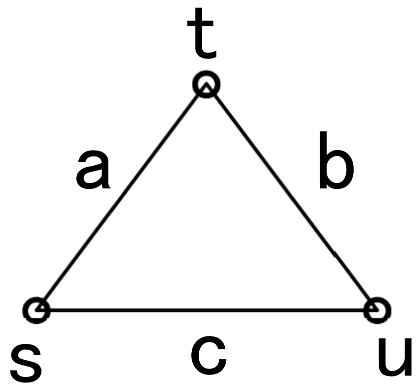
（4）三角形の数は無限で増加率は指数関数的増加

（5）「双曲的」とよばれる





コクセター群とコクセターの定理



左の図のダイアグラムに対して
下のような「群」を対応させる
この群は3次のコクセター群とよばれる

$$W = \langle\, s \;\; t \;\; u \;\big|\; s^2 = t^2 = u^2 = (st)^a = (tu)^b = (us)^c = 1 \,\rangle$$

この3次のコクセター群に対して
群Wと生成系Sのペアをコクセター系
という

(W, S)

（ここで $S = \{s, t, u\}$ とする）

$$W = \langle s\ \ t\ \ u \mid s^2 = t^2 = u^2 = (st)^a = (tu)^b = (us)^c = 1 \rangle$$

は次のように考える

（1） $S = \{s, t, u\}$ をWの生成系とする

（2） このコクセター群Wの要素は生成系Sの文字s,t,uを並べた有限列の全部とする

（3） Sの文字s,t,uを並べた有限列は

$$s^2 = t^2 = u^2 = (st)^a = (tu)^b = (us)^c = 1$$

という等式を用いて移りあえるもの同士はWのなかでは同じものとみなす

コクセター群の性質

$$W = \langle\, s\ \ t\ \ u \mid s^2 = t^2 = u^2 = (st)^a = (tu)^b = (us)^c = 1 \,\rangle$$

$$ss = s^2 = 1, \qquad tt = t^2 = 1, \qquad uu = u^2 = 1$$

a が偶数のとき

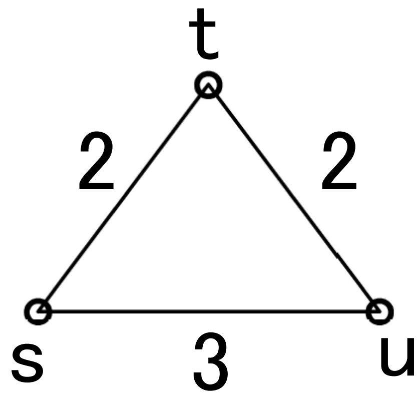
$$\underbrace{ststst\cdots stst}_{a\text{ 個}} = (st)^a = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{st\cdots st}_{a/2\text{ 個}} = \underbrace{ts\cdots ts}_{a/2\text{ 個}}$$

a が奇数のとき

$$\underbrace{ststst\cdots stst}_{a\text{ 個}} = (st)^a = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{st\cdots sts}_{(a-1)/2\text{ 個}} = \underbrace{ts\cdots tst}_{(a-1)/2\text{ 個}}$$

たとえば 

のときを例に紹介すると

$$W = \langle\, s \;\; t \;\; u \mid s^2 = t^2 = u^2 = (st)^2 = (tu)^2 = (us)^3 = 1 \rangle$$

$$S = \{s, t, u\}$$

$$stst = 1 \;\Leftrightarrow\; sts = t \;\Leftrightarrow\; st = ts$$

$$tutu = 1 \;\Leftrightarrow\; tut = u \;\Leftrightarrow\; tu = ut$$

$$ususus = 1 \;\Leftrightarrow\; usu = sus$$

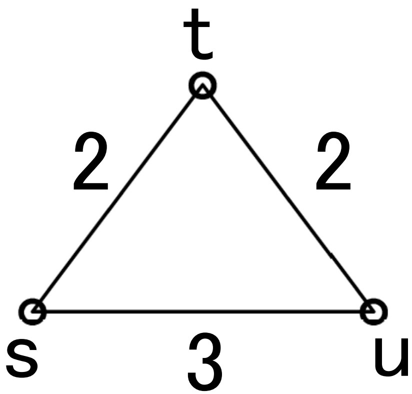
したがって Wの要素は次のようになる

$1,\quad s,\quad t,\quad u,\quad (ss = 1),\quad st,\quad tu,$

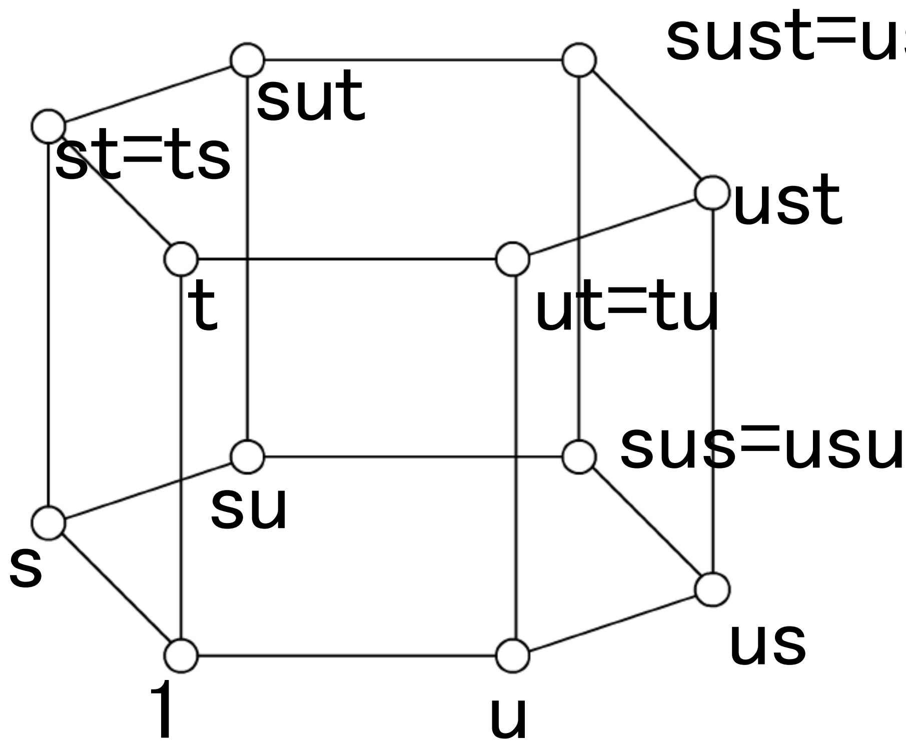
$su,\quad us,\quad (ts = st),\quad (sts = t),$

$sus = usu,\quad stu,\quad ust,$

$tusu = tsus = stus = suts = sust$ （有限で12個）



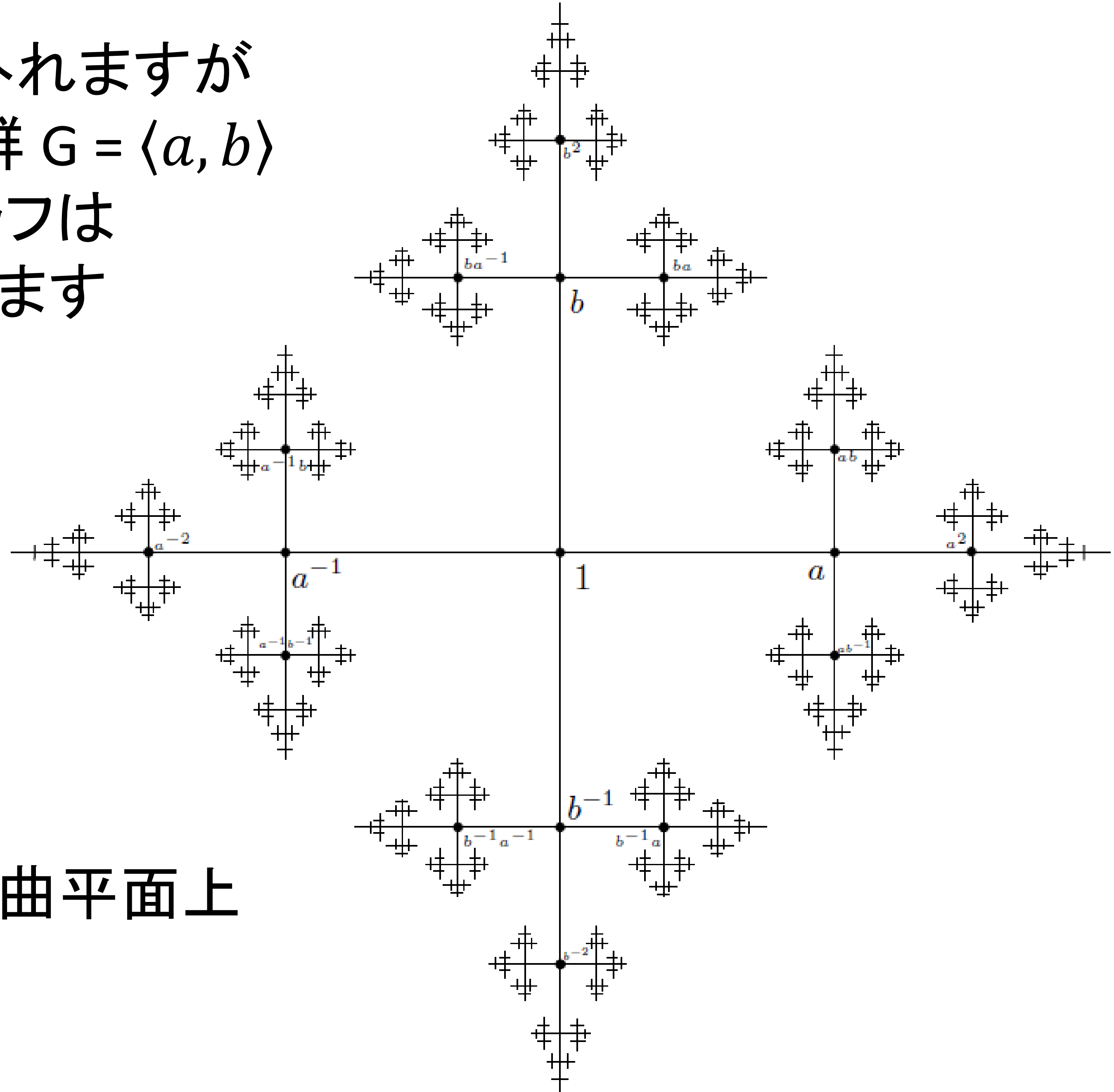
に対応する (W,S) のケーリーグラフは



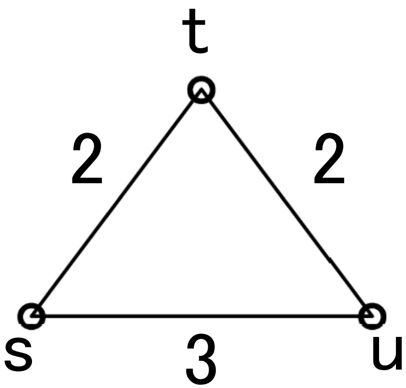
と描くことができる

六角柱という立体になる

本論とは少し外れますが
階数2の自由群 G = $\langle a, b \rangle$
のケーリーグラフは
右のようになります



この絵は
曲率が負の双曲平面上
に描かれます



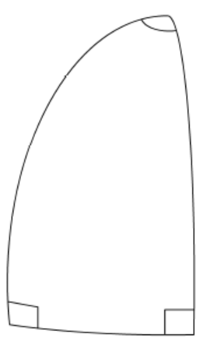
ダイアグラム

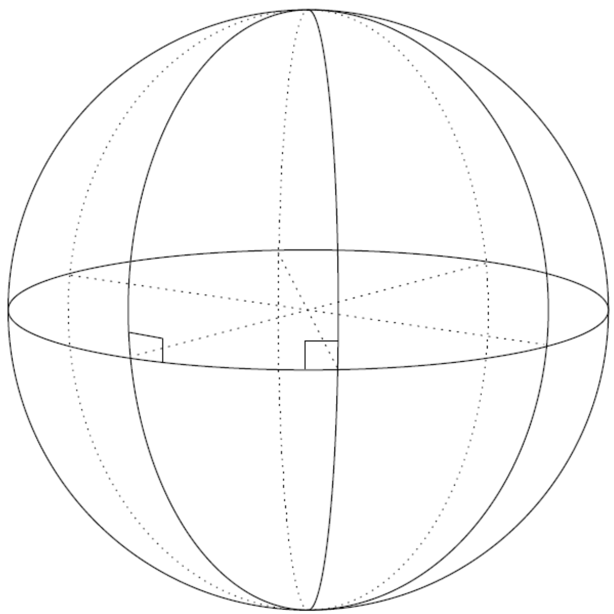
$$W = \langle s\ \ t\ \ u \mid s^2 = t^2 = u^2 = (st)^2 = (tu)^2 = (us)^3 = 1 \rangle$$

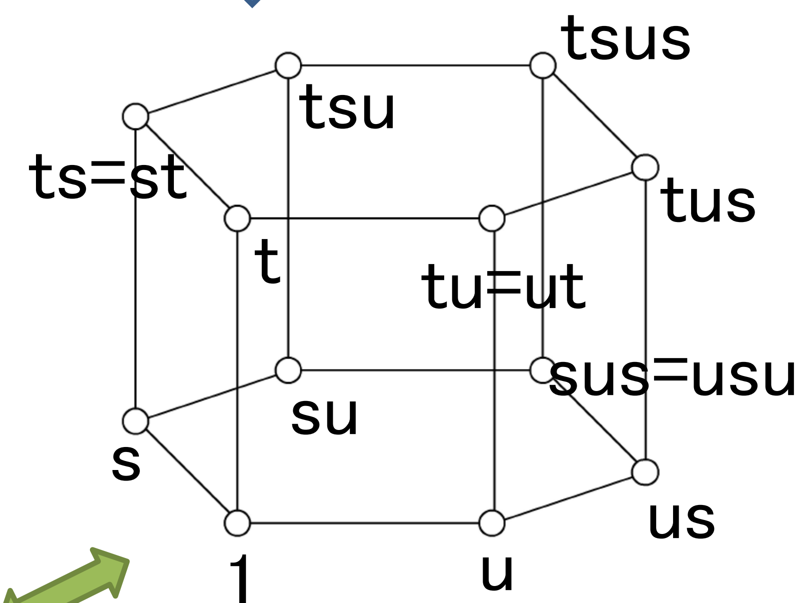
$$S = \{s, t, u\}$$

コクセター群（コクセター系）

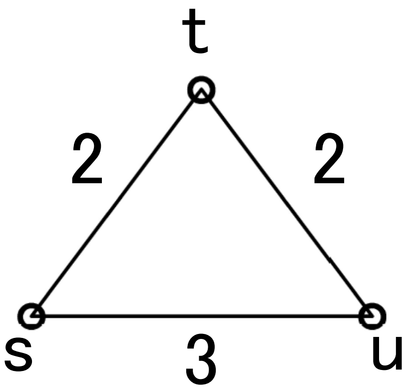
$$\pi/_2 + \pi/_2 + \pi/_3 > \pi$$







ケーリーグラフ
（立体の形になる）



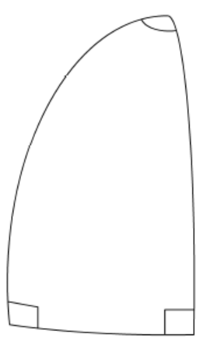
$$W = \langle s\ \ t\ \ u \mid s^2 = t^2 = u^2 = (st)^2 = (tu)^2 = (us)^3 = 1 \rangle$$

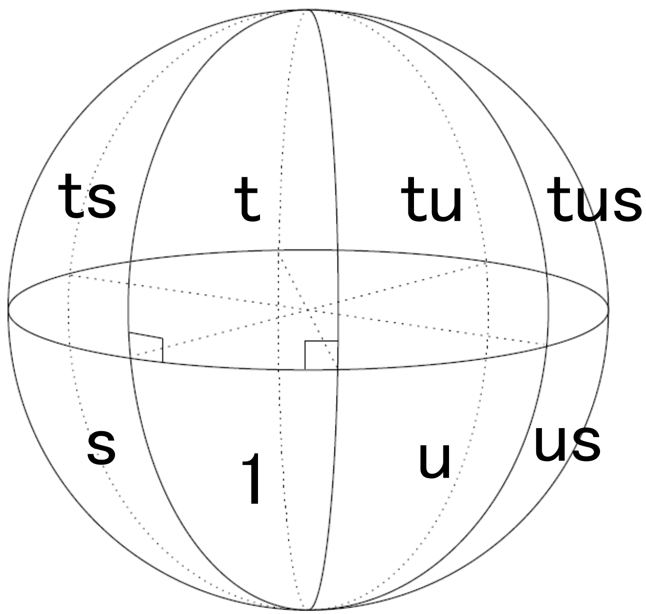
$$S = \{s, t, u\}$$

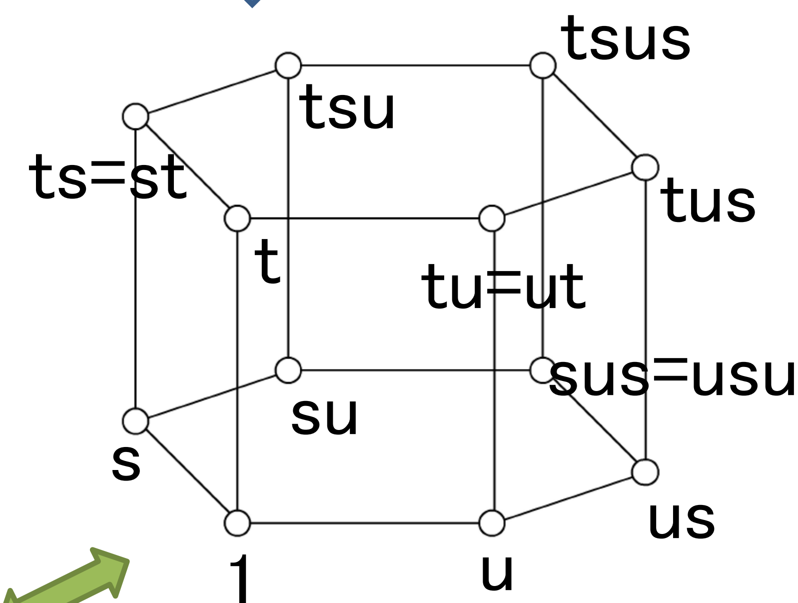
コクセター群（コクセター系）

ダイアグラム

$$\pi/_2 + \pi/_2 + \pi/_3 > \pi$$



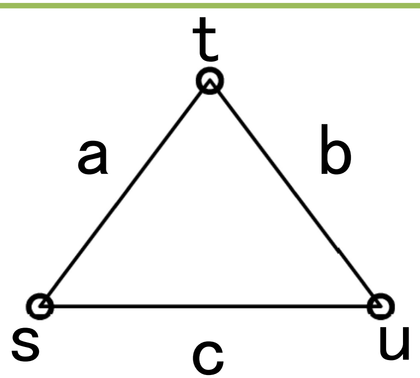




ケーリーグラフ
（立体の形になる）

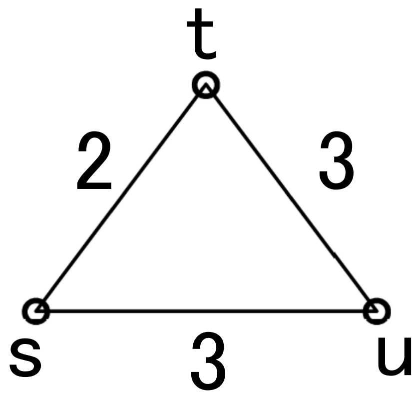
定理（H.S.M.Coxeter 1930年代）

群 G が有限鏡映群である必要十分条件は
G が有限コクセター群となることである

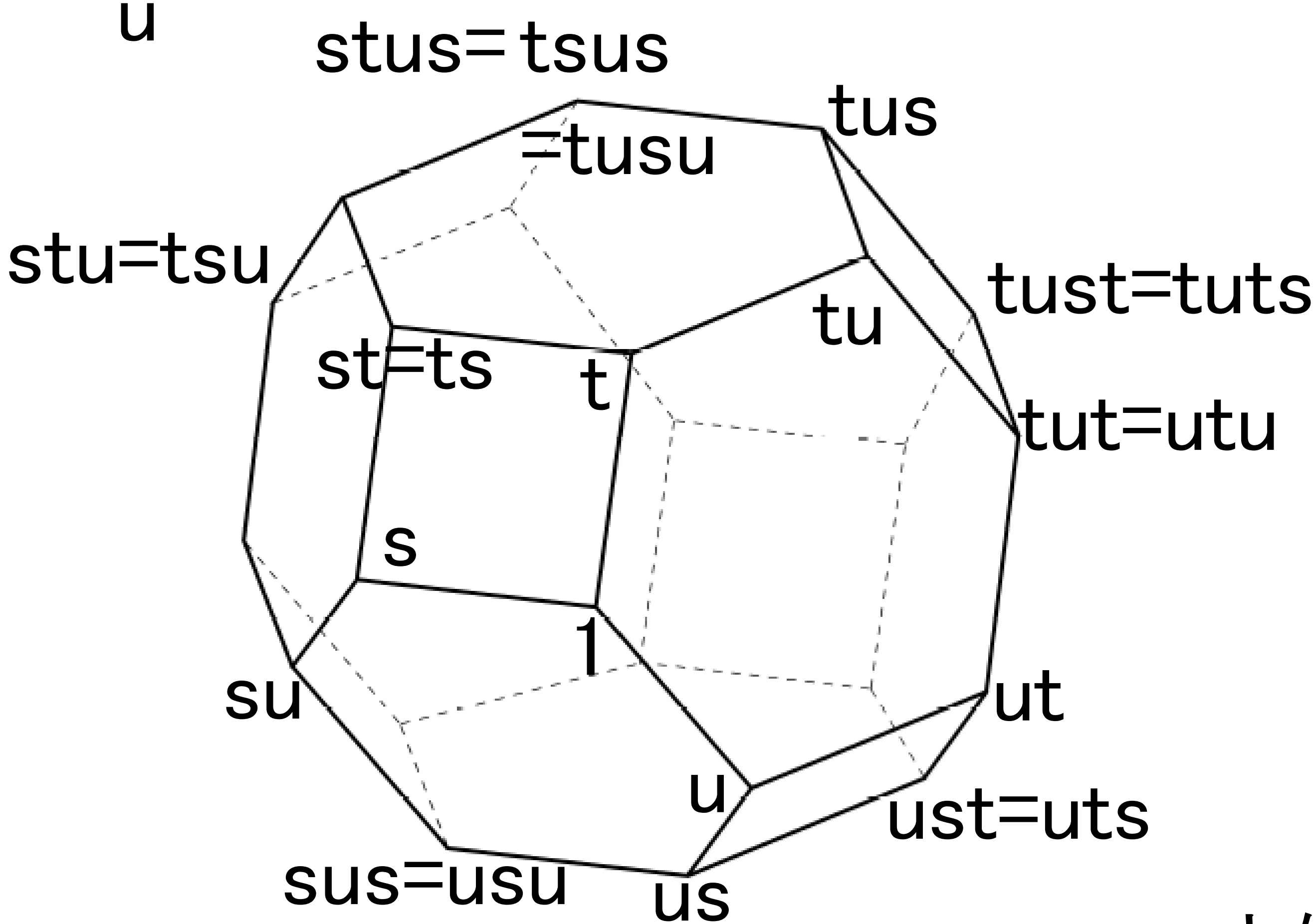


$$\pi/a + \pi/b + \pi/c > \pi$$

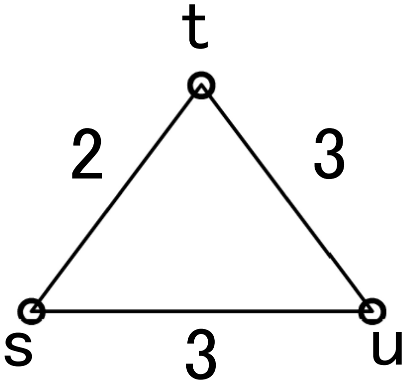
このダイアグラムと対応するコクセター群は有限となり
上の定理から有限鏡映群になるのでケーリーグラフは
空間(R^3)の「立体」の形になることがわかる。この立体
は球面上の三角形の鏡映による敷き詰めと対応している



に対応する (W,S) のケーリーグラフは



となる



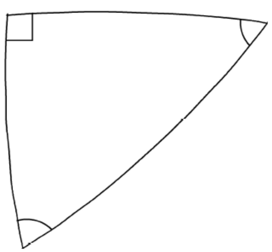
ダイアグラム

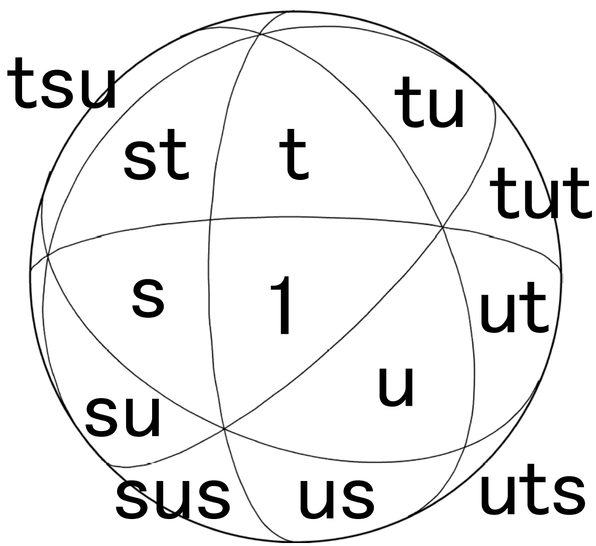
$$W = \langle\, s \;\; t \;\; u \mid s^2 = t^2 = u^2 = (st)^2 = (tu)^3 = (us)^3 = 1 \rangle$$

$$S = \{s, t, u\}$$

有限コクセター群（コクセター系）

$$\pi/2 + \pi/3 + \pi/3 > \pi$$

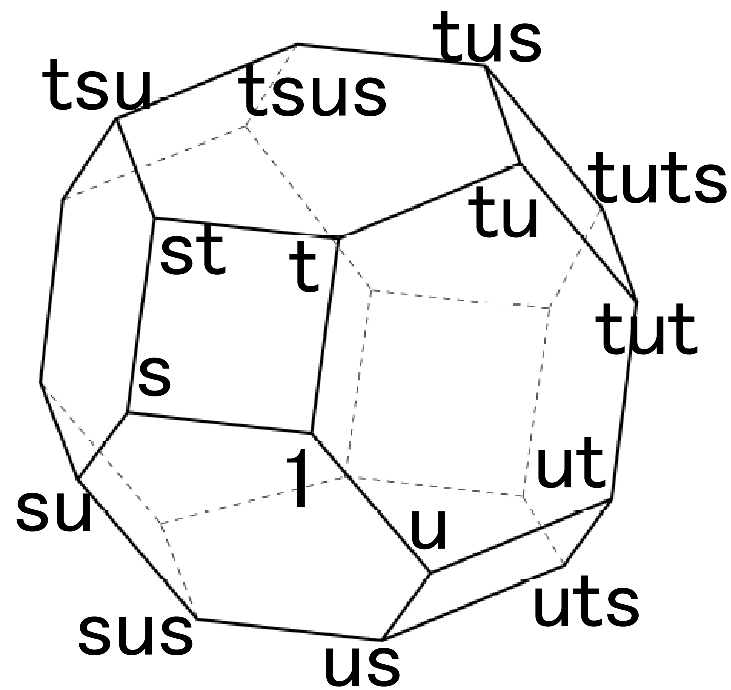




$\pi/2 \;\; \pi/3 \;\; \pi/3$

の角度の三角形の

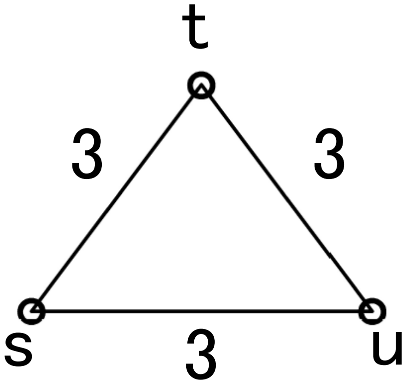
鏡映による球面の敷き詰め



ケーリーグラフ

（Wが有限鏡映群であること

から R^3の立体の形になる）

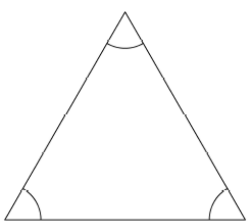


ダイアグラム

$$W = \langle\, s \;\; t \;\; u \mid s^2 = t^2 = u^2 = (st)^3 = (tu)^3 = (us)^3 = 1 \,\rangle$$
$$S = \{s, t, u\}$$

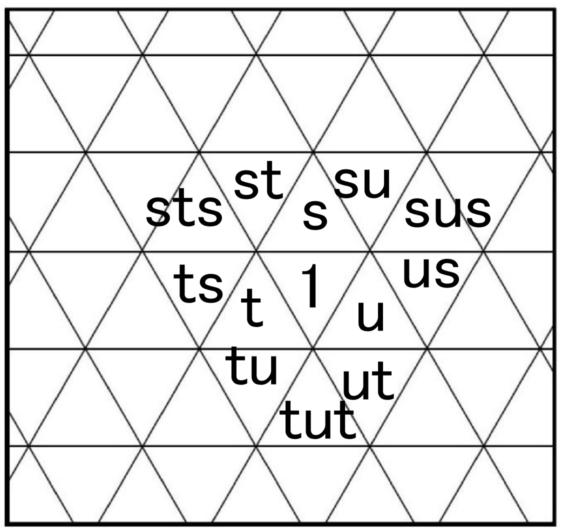
コクセター群（コクセター系）

$$\pi/3 + \pi/3 + \pi/3 = \pi$$

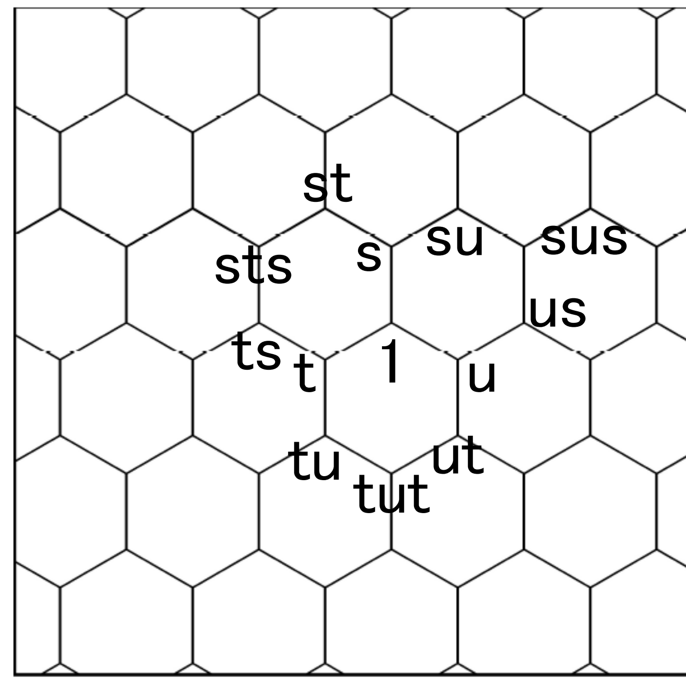


$\pi/3 \quad \pi/3 \quad \pi/3$

の角度の三角形の

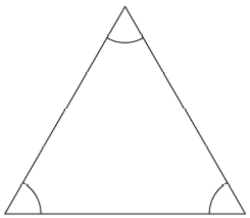


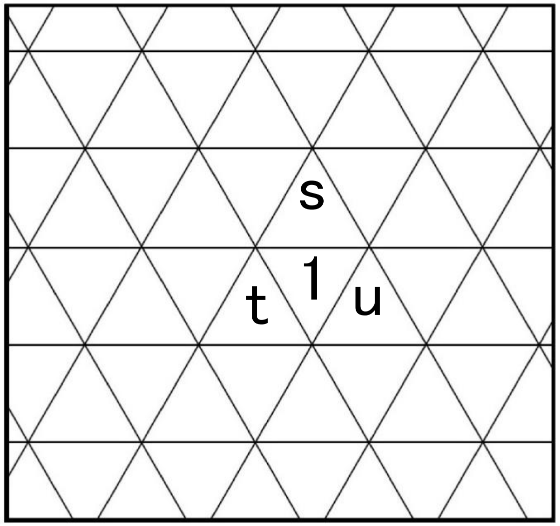
鏡映によるユークリッド平面の敷き詰め



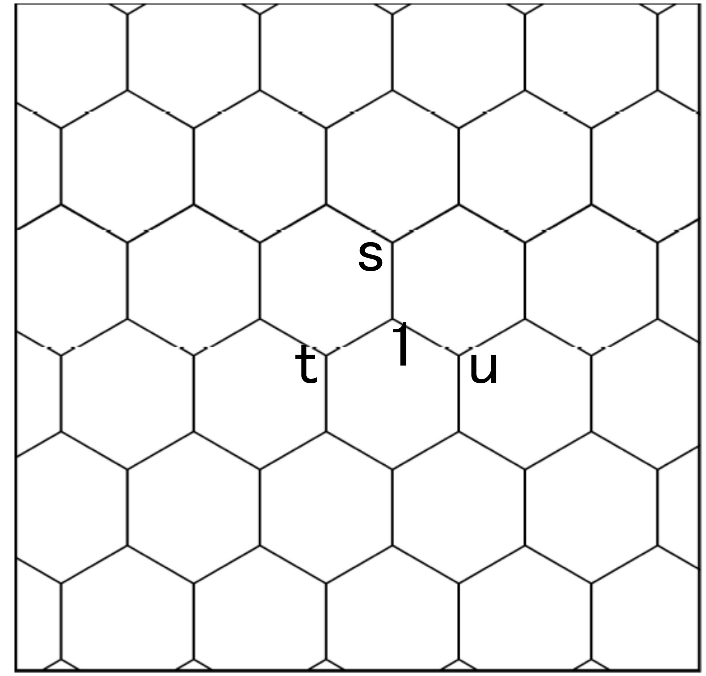
ケーリーグラフ

（ユークリッド平面になる）

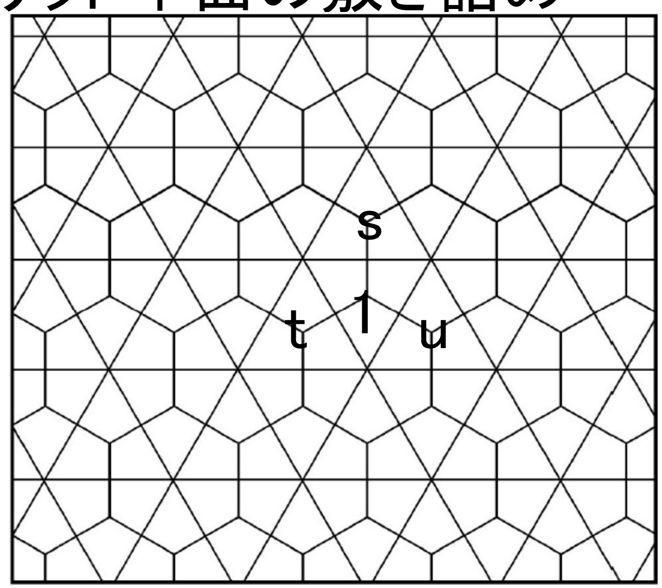




$\pi/3$ $\pi/3$ $\pi/3$
の角度の三角形の
鏡映によるユークリッド平面の敷き詰め



ケーリーグラフ
（ユークリッド平面になる）



コクセター群の性質

$$W = \langle s\ \ t\ \ u \mid s^2 = t^2 = u^2 = (st)^a = (tu)^b = (us)^c = 1 \rangle$$

$$ss = s^2 = 1, \qquad tt = t^2 = 1, \qquad uu = u^2 = 1$$

a が偶数のとき

$$\underbrace{ststst\cdots stst}_{a\text{ 個}} = (st)^a = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{st\cdots st}_{a/2\text{ 個}} = \underbrace{ts\cdots ts}_{a/2\text{ 個}}$$

a が奇数のとき

$$\underbrace{ststst\cdots stst}_{a\text{ 個}} = (st)^a = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{st\cdots sts}_{(a-1)/2\text{ 個}} = \underbrace{ts\cdots tst}_{(a-1)/2\text{ 個}}$$

$$W = \langle s \ t \ u \mid s^2 = t^2 = u^2 = (st)^a = (tu)^b = (us)^c = 1 \rangle$$

（３）S={s,t,u}の文字s,t,uを並べた有限列は

$$s^2 = t^2 = u^2 = (st)^a = (tu)^b = (us)^c = 1$$

という等式を用いて移りあえるもの同士は
Wのなかでは同じものとみなす

Wの要素 w が

$$w = s_1 s_2 s_3 \cdots s_n = t_1 t_2 t_3 \cdots t_k$$

とあらわされているとき

n は偶数 $\Leftrightarrow$ k は偶数

n は奇数 $\Leftrightarrow$ k は奇数

となる

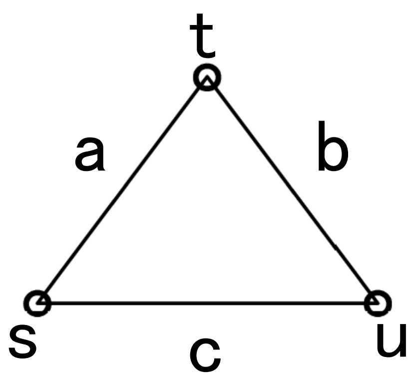
Wの要素 w が

$$w = s_1 s_2 s_3 \cdots s_n = t_1 t_2 t_3 \cdots t_k$$

とあらわされているとき

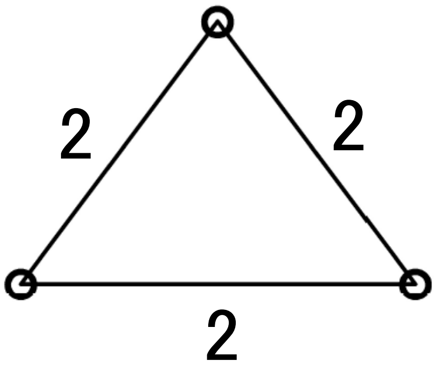
n は偶数 $\Leftrightarrow$ k は偶数

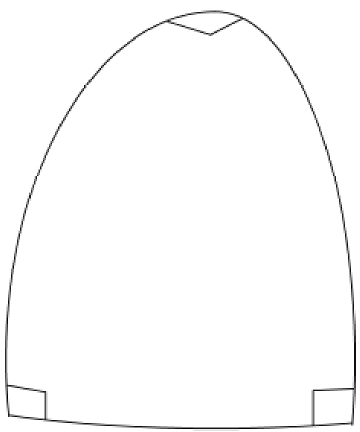
n は奇数 $\Leftrightarrow$ k は奇数　　となる



左のダイアグラムと対応する三角形の鏡映による敷き詰めは対応するコクセター群の要素が偶数の長さか奇数の長さかで2色で色分けできる

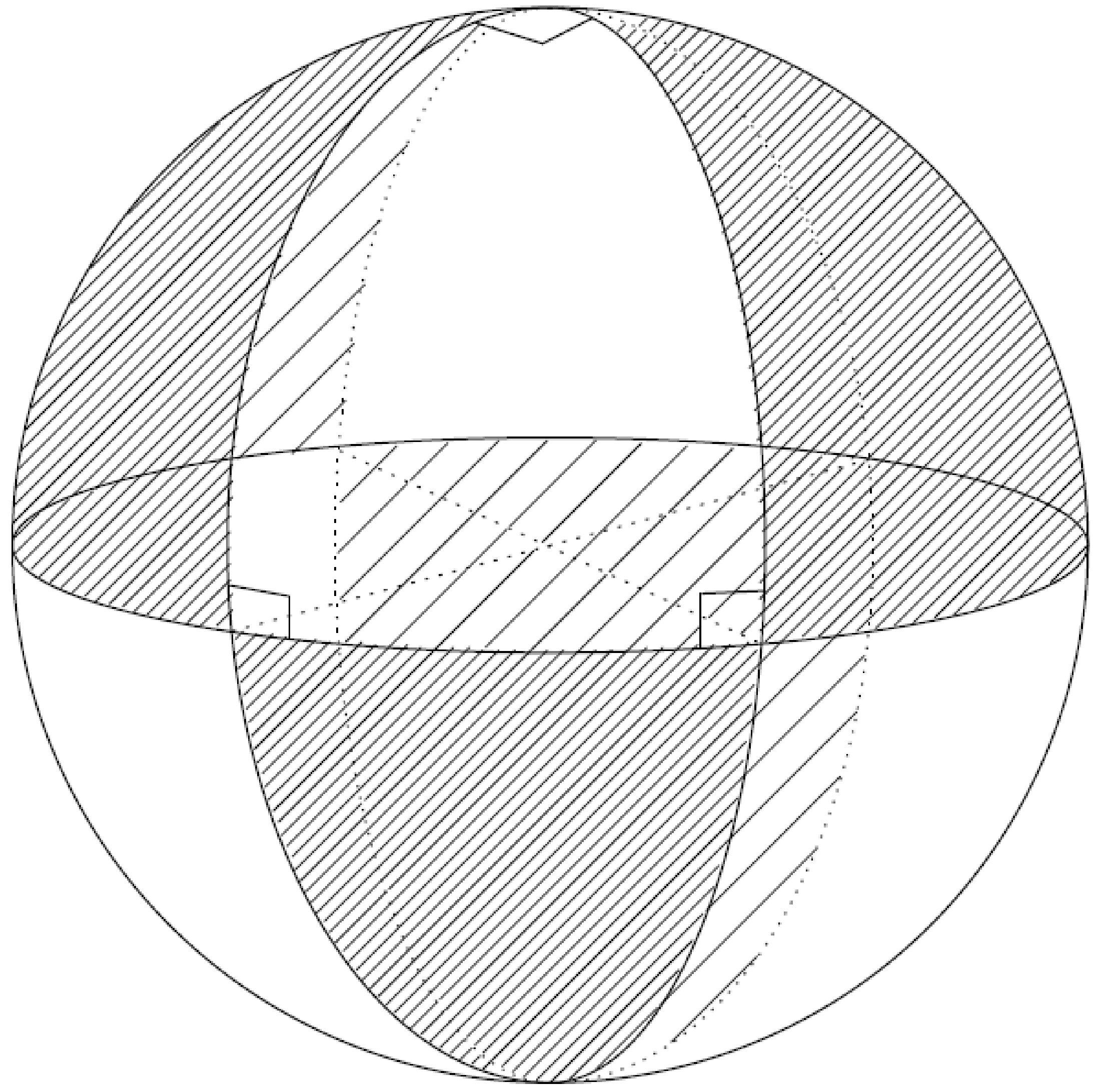
エッシャーの絵の「天使」と「悪魔」

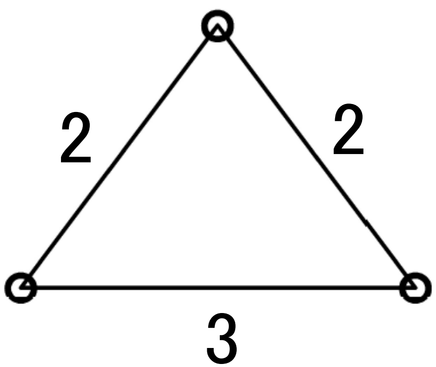


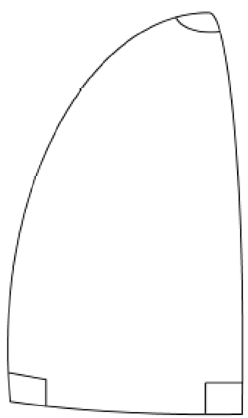


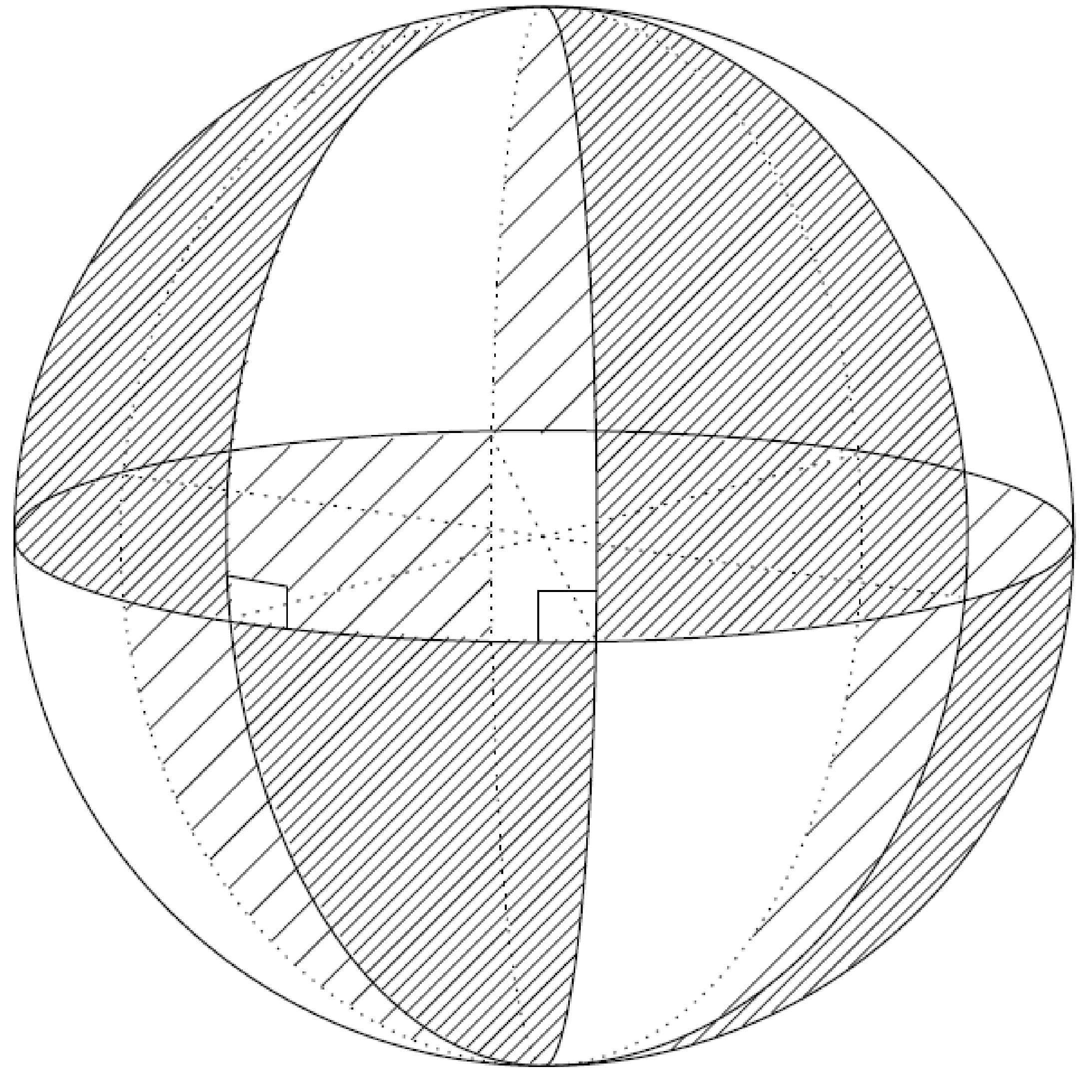
$${}^{\pi}/_{2} + {}^{\pi}/_{2} + {}^{\pi}/_{2} > \pi$$

曲率＞0



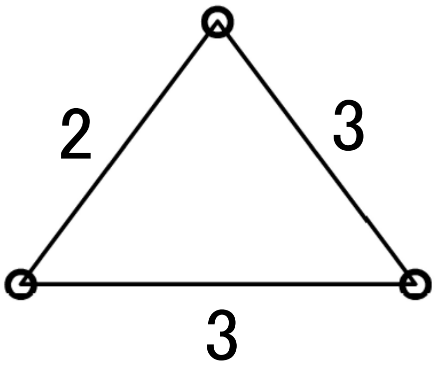


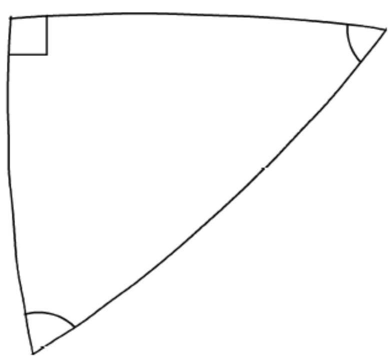




$$\pi/_2 + \pi/_2 + \pi/_3 > \pi$$

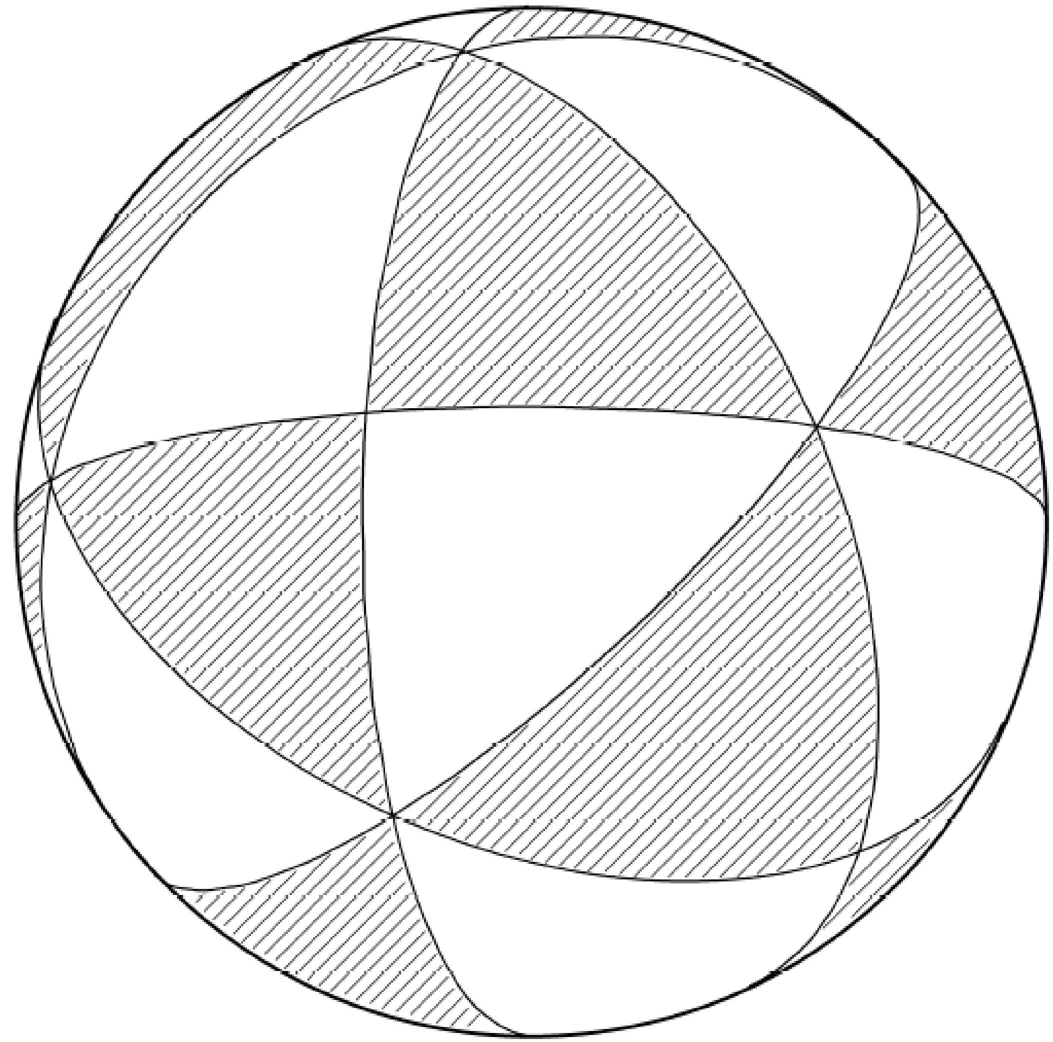
曲率＞0

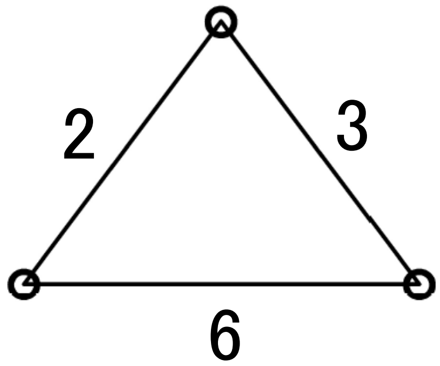


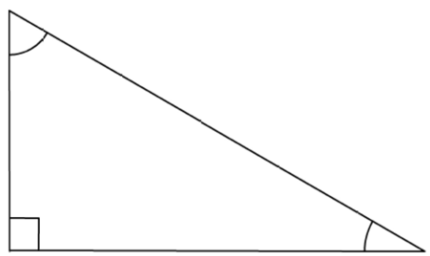


$${}^{\pi}/_{2}+{}^{\pi}/_{3}+{}^{\pi}/_{3}>\pi$$

曲率＞0

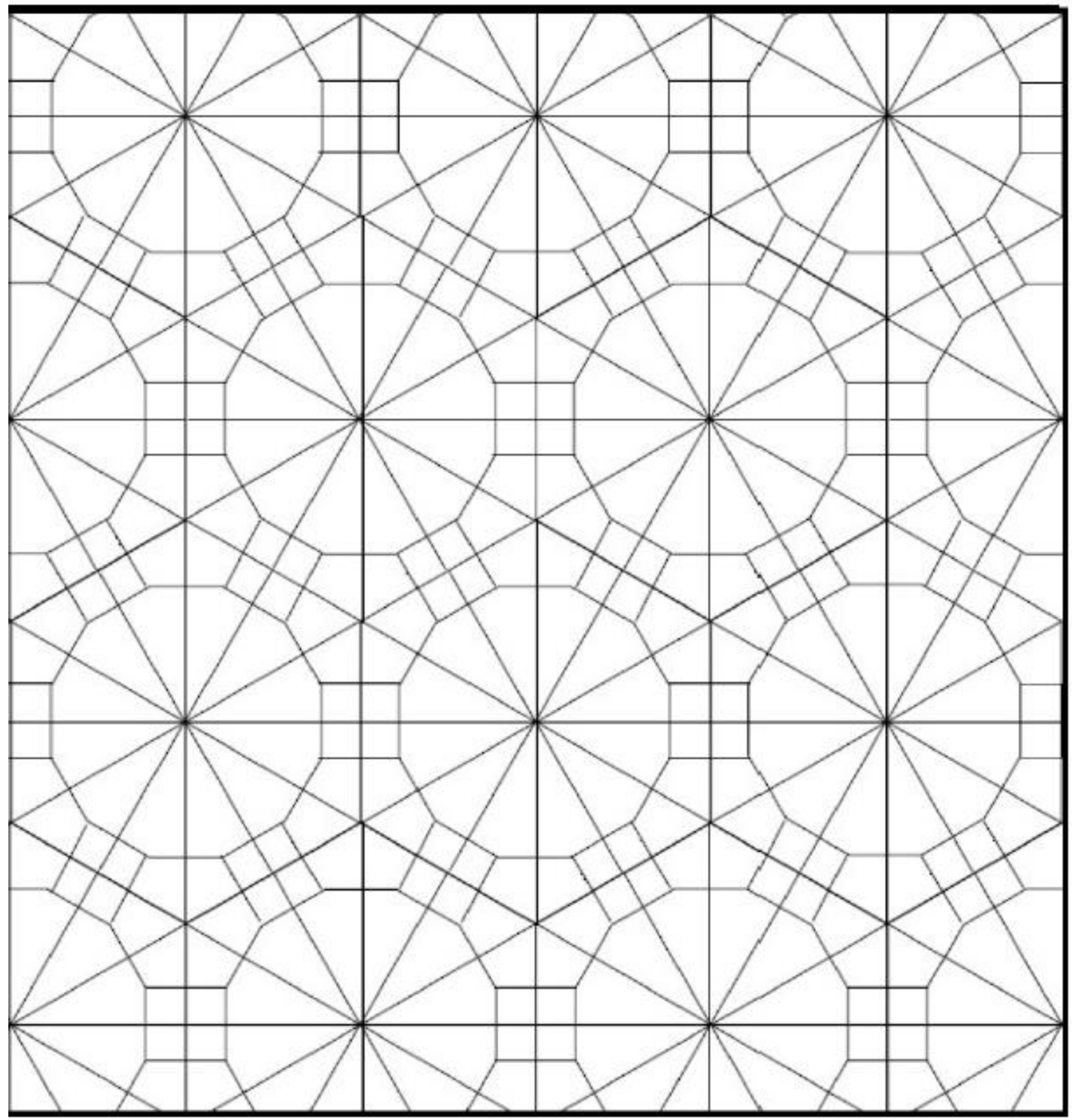


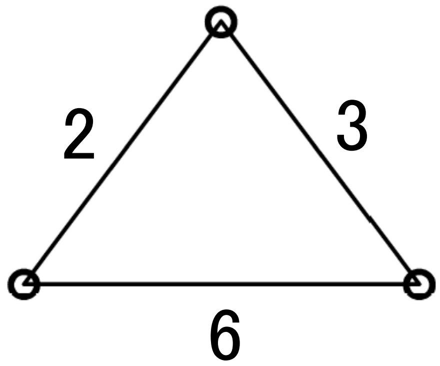


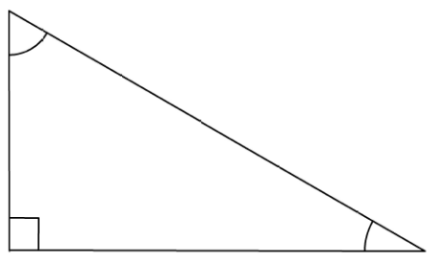


$$\pi/_2 + \pi/_3 + \pi/_6 = \pi$$

曲率＝0

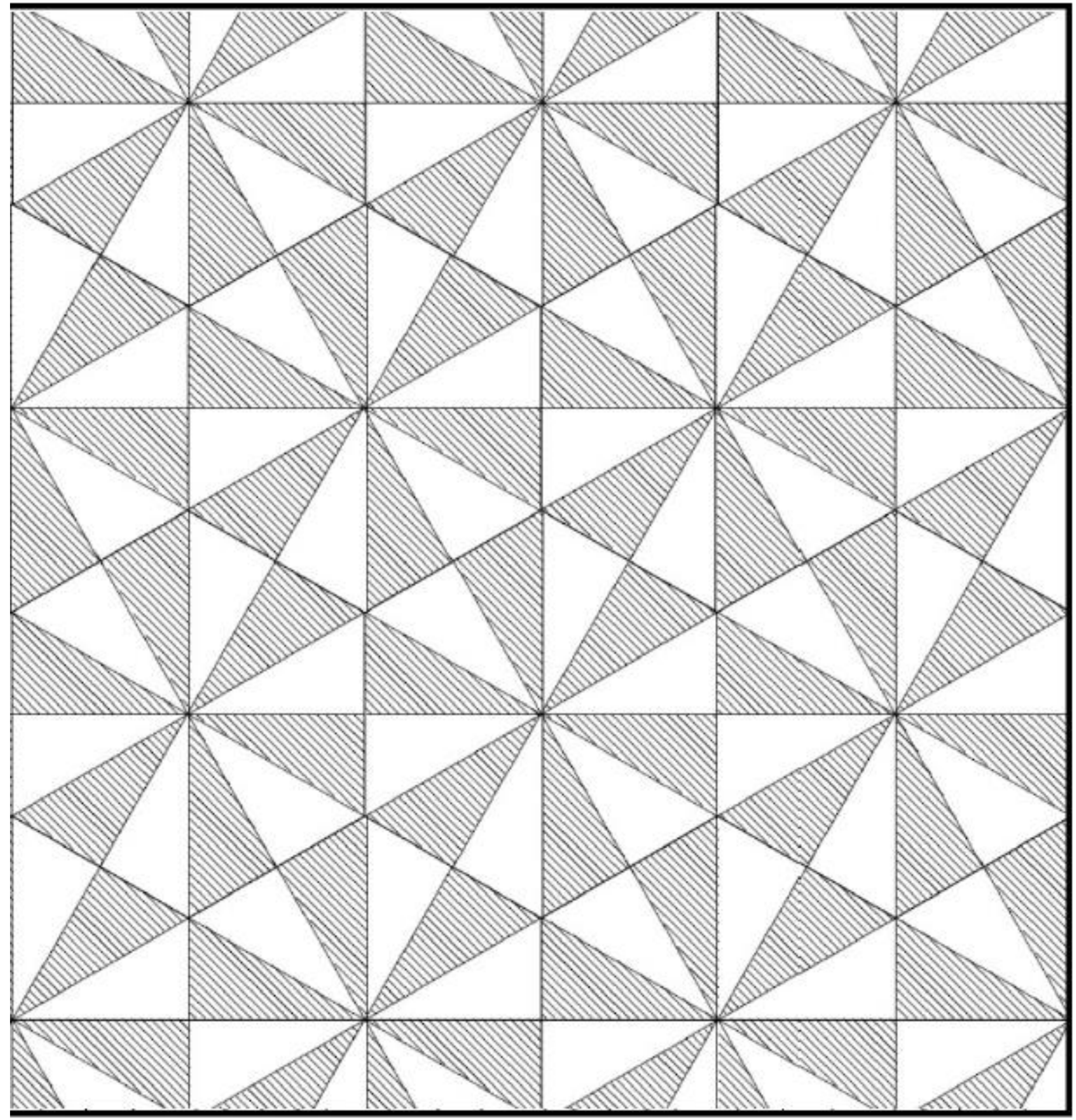


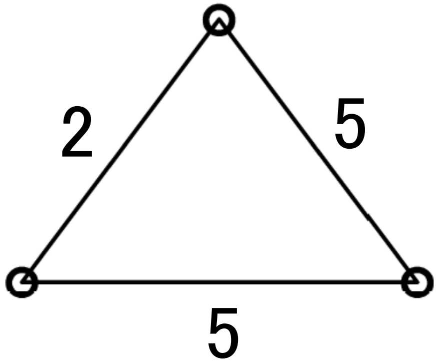


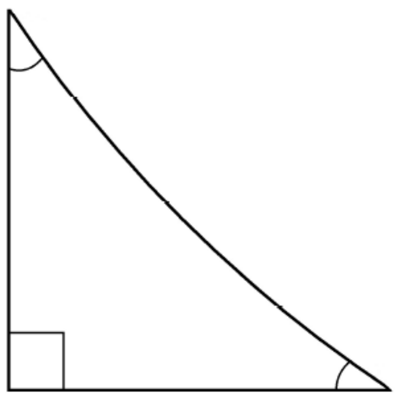


$$^{\pi}/_{2} + ^{\pi}/_{3} + ^{\pi}/_{6} = \pi$$

曲率＝0

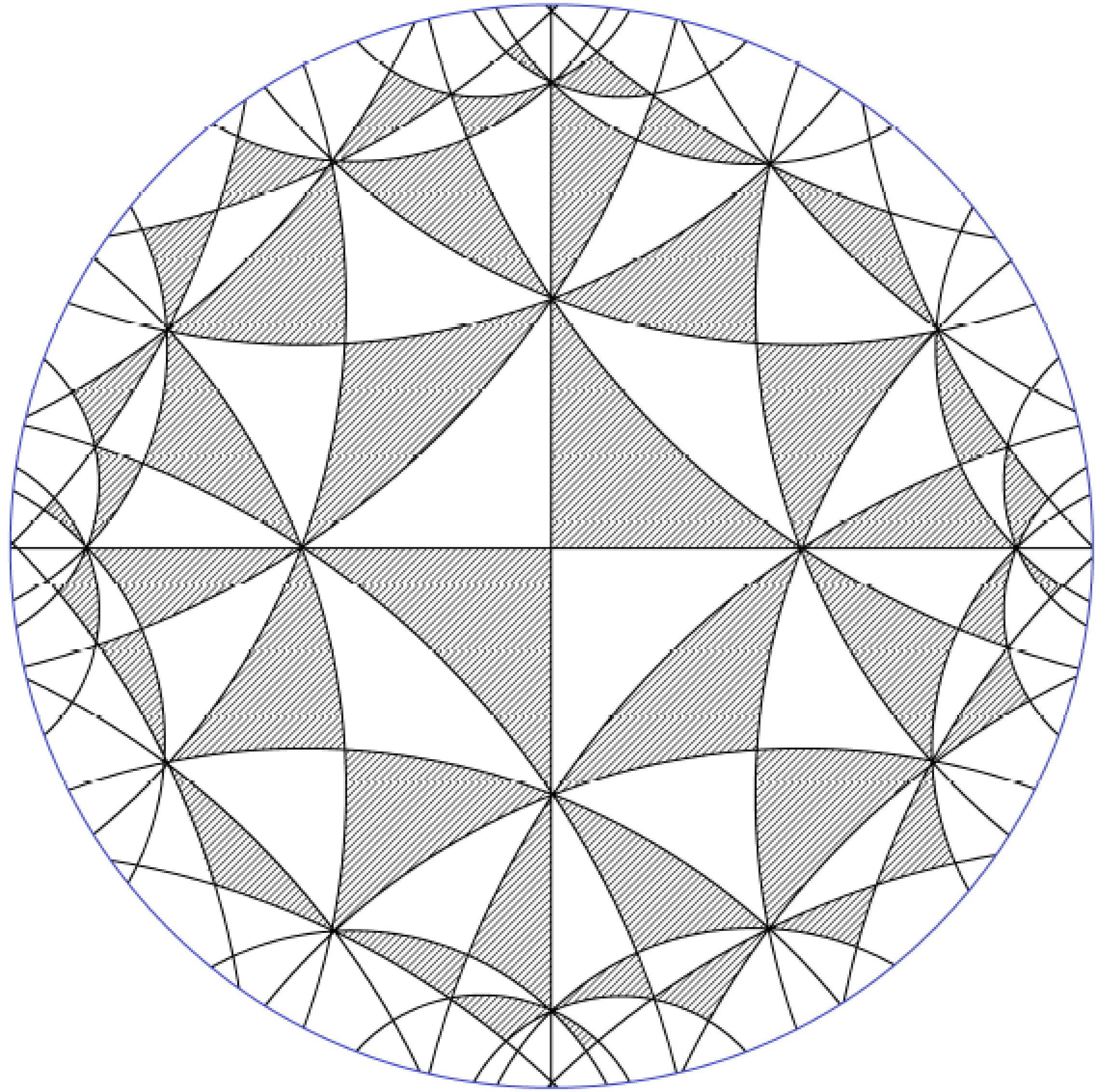




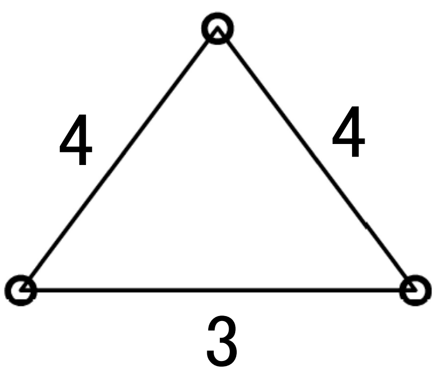


$$\pi/_2 + \pi/_5 + \pi/_5 < \pi$$

曲率＜0

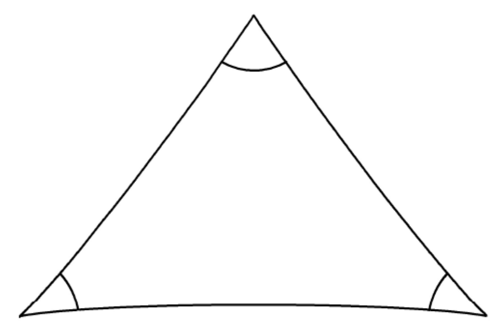


M.C.エッシャーの絵「円の極限Ⅳ 天国と地獄」は
下図のようなダイアグラムと対応する三角形の
負の曲率の双曲平面での鏡映による敷き詰め
として描かれている。
また「天使」と「悪魔」の2つが交互に配置できる
理由は、コクセター群と関わりがある。



$$\pi/4 + \pi/4 + \pi/3 < \pi$$

曲率<0



最後に　コクセター群の未解決な問題について

- ３次のコクセター系については、ここまで見てきたようにして、分類ができる。
- 有限のコクセター群（有限鏡映群）については Coxeter氏自身によってすべての分類がなされている。
- 一方で、無限のコクセター群の分類の問題（同型問題）は現時点で、まだ未解決。

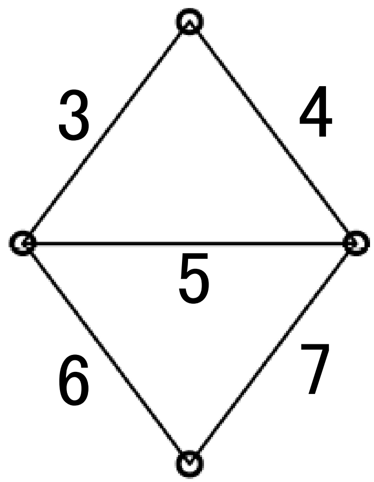
<u>コクセター群の同型問題</u>

（１） 与えられた2つのコクセター群は同型か否かを（２つのコクセター系の形から）判定せよ。

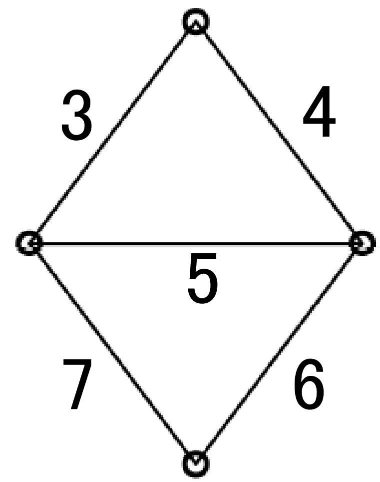
（２） 与えられたコクセター群を持つコクセター系をすべて求めよ。

たとえば、近年、「ツイスト」という操作でコクセター群は
同型だが異なるコクセター系をつくる方法が発見された。

N.Brady, J.P.McCammond, B.Mühlherr, W.D.Neumann (2002)



(W_1, S_1)



(W_2, S_2)

この２つのコクセター系は異なる形をしているが
コクセター群W_1とW_2は代数的には同じ形をしている。

・・・・・・このようなタイプのもの 以外にもあるのか？

（実は最近、「コーダル」という
ツイスト以外の手法も見つかっています・・・）

ご清聴ありがとうございました。