作用素半群
–高校数学をもとに指数関数を一般化しよう–

田中直樹

静岡大学理学部数学科

2016 年 7 月 28 日
サイエンスカフェ in 静岡

目次

導関数

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

例

関数 $f(x) = |x|$ $(-1 < x < 1)$ は $x = 0$ で微分可能でない。

積の微分法

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

部分積分法

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

例

関数 $f(x) = |x|$ $(-1 < x < 1)$ は $x = 0$ で微分可能でない。

解説

$x = 0$ で微分可能であるとすると, 極限値

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

が存在する。ところが,

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h| - |0|}{h} = \begin{cases} \dfrac{h}{h} = 1 & (0 < h < 1) \\ \dfrac{-h}{h} = -1 & (-1 < h < 0) \end{cases}$$

であるから,

$$1 = f'(0) = -1$$

となり, 矛盾が生じる。

指数関数の特徴づけ

ネイピア数 e

$$e = \lim_{\lambda \to 0} (1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}$$

指数関数の性質

A を実数とするとき，$S_A(t) = e^{At}$ $(t \geq 0)$ は次の性質をもつ。

(a) $S_A(t)$ は $t \geq 0$ について連続である。

(b) $S_A(0) = 1$, $S_A(t+s) = S_A(t)S_A(s)$ $(t, s \geq 0)$

(c) $S_A(t)$ は $t = 0$ で微分可能で，$S'_A(0) = A$ である。

性質 (b)

$S_A(0) = e^{A0} = e^0 = 1$ であり，指数法則により，

$$\begin{aligned} S_A(t+s) &= e^{A(t+s)} = e^{At+As} \\ &= e^{At}e^{As} = S_A(t)S_A(s) \quad (t, s \geq 0) \end{aligned}$$

問題 (性質 (c))

$S_A(t)$ は $t=0$ で微分可能で, $S'_A(0)=A$ を満たすことを示せ。

解答例

$h \neq 0$ に対して $\lambda = e^{Ah}-1$ とおくと, $1+\lambda = e^{Ah}$,

$$\log(1+\lambda) = Ah, \qquad \frac{1}{h} = \frac{A}{\log(1+\lambda)}$$ より,

$$\frac{S_A(h)-S_A(0)}{h} = \frac{e^{Ah}-1}{h} = \frac{A}{\log(1+\lambda)}\lambda = A\frac{1}{\frac{1}{\lambda}\log(1+\lambda)}$$
$$= A\frac{1}{\log(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}} \to A\frac{1}{\log e} = A \ (h\to 0)$$

だから, $S_A(t)$ は $t=0$ で微分可能で, $S'_A(0)=A$ を満たす。

指数関数の特徴づけ

A を実数とする。このとき, 関数 $S(t)$ $(t \geq 0)$ について, 次の (i) と (ii) は同値である。

(i) $S(t) = e^{At}$ $(t \geq 0)$ である。

(ii) $S(t)$ $(t \geq 0)$ は

$$S(0) = 1, \quad S(t+s) = S(t)S(s) \ (t, s \geq 0) \tag{1}$$

$S(t)$ は $t = 0$ で微分可能で, $S'(0) = A$ である (2)

を満たす連続関数である。

(ii) ならば (i) の証明の方針

(iii) $S(t)$ は $S(0) = 1$ を満たし, さらに, $t \geq 0$ で微分可能で, $S'(t) = AS(t)$ $(t \geq 0)$ を満たす関数である。

(ii) ならば (iii), (iii) ならば (i) を示す。

(ii) ならば (iii) の証明

$S(t)$ は $t > 0$ で微分可能で, $S'(t) = AS(t)$ $(t > 0)$ である

を示せばよいので, $t > 0$ とする。$t > h > 0$ を満たす h について,

$$\frac{S(t+h)-S(t)}{h} = \frac{(S(h)-S(0))S(t)}{h} \to AS(t) \ (h \to +0),$$
$$\frac{S(t-h)-S(t)}{-h} = \frac{(S(h)-S(0))S(t-h)}{h} \to AS(t) \ (h \to +0)$$

であるから, 所要の結果を得る。

$$(e^{At})' = Ae^{At}$$

(iii) ならば (i) の証明

$t \geq 0$ に対して, 積の微分法を用いると

$$\begin{aligned}(e^{-At}S(t))' &= (e^{-At})'S(t) + e^{-At}S'(t)\\ &= (-A)e^{-At}\cdot S(t) + e^{-At}AS(t)\\ &= 0\end{aligned}$$

であるから, $e^{-At}S(t) = C$ $(t \geq 0)$, ただし C は定数, より,

$$e^{-At}S(t) = C = e^{-A0}S(0) = 1 \quad (t \geq 0)$$

を得る。$e^{At}e^{-At} = e^0 = 1$ より, $S(t) = e^{At}$ $(t \geq 0)$ が成り立つ。

問題

A を実数とする。$S(t)$ $(t \geq 0)$ は

$$S(0) = 1, \quad S(t+s) = S(t)S(s) \ (t, s \geq 0)$$

$$S(t) \text{ は } t = 0 \text{ で微分可能で, } S'(0) = A \text{ である}$$

を満たす連続関数とする。このとき, $S(t)$ $(t \geq 0)$ を求めよ。

1. $S'(t) = AS(t)$ $(t \geq 0)$ を満たす。
2. $(e^{-At}S(t))' = 0$ より, $S(t) = e^{At}$ $(t \geq 0)$ である。

2 部の話題

A を作用素とする。$S(t)$ $(t \geq 0)$ は

$$S(0) = I(\text{恒等作用素}), \quad S(t+s) = S(t)S(s) \ (t, s \geq 0)$$

$$S(t) \text{ は } t = 0 \text{ で微分可能で, } S'(0) = A \text{ である}$$

を満たす連続関数とする。このとき, $S(t)$ $(t \geq 0)$ を求めよ。

A を実数とし, $S(t)$ $(t \geq 0)$ を

- $S(0) = 1$, $\quad S(t+s) = S(t)S(s)$ $(t, s \geq 0)$
- $S(t)$ は $t = 0$ で微分可能で, $S'(0) = A$ である

を満たす連続関数とする。このとき, $S(t)$ $(t \geq 0)$ は

$t \geq 0$ で微分可能で, $S'(t) = AS(t)$ $(t \geq 0)$ を満たす。

さて, u_0 を実数とし,

$$u(t) = S(t)u_0 \quad (t \geq 0)$$

と定める。このとき, $u(t)$ は $t \geq 0$ で微分可能であり,

$$u'(t) = S'(t)u_0 = AS(t)u_0 = Au(t) \quad (t \geq 0)$$

を満たし, $u(0) = S(0)u_0 = u_0$ である。

指数関数の役割と微分方程式の初期値問題

実数 A と u_0 が与えられたとき,

$$u'(t) = Au(t) \quad (t \geq 0) \qquad \text{(微分方程式)}$$
$$u(0) = u_0 \qquad \text{(初期条件)}$$

を満たす関数 $u(t)$ を $S(t)$ $(t \geq 0)$ を用いて, $u(t) = S(t)u_0$ $(t \geq 0)$ により表現できる。

$S(t)$ $(t \geq 0)$ を構成できれば, 初期値問題を解くことができる！

1. A が実数の場合, ネイピア数 e により, $S(t) = e^{At}$ である。
2. A が作用素の場合？
3. A が実数の場合, $S(t)$ を直接構成する方法は？

指数関数の構成方法

目的

次の 2 つの条件を満たす連続関数 $S(t)$ $(t \geq 0)$ の構成

- $S(0) = 1, \quad S(t+s) = S(t)S(s)$ $(t, s \geq 0)$
- $S(t)$ は $t = 0$ で微分可能で, $S'(0) = A$ である。

方針

次を満たす関数 $S(t)$ $(t \geq 0)$ の構成

$$S(0) = 1 \text{ であり, } S'(t) = AS(t) \ (t \geq 0) \text{ である。}$$

方法

1. 逐次近似法
2. 差分法
3. ラプラス変換

■ 逐次近似法

連続関数 $\boldsymbol{S(t)}$ $(\boldsymbol{t \geq 0})$ について, 次の 2 つの条件は同値である。

$\boldsymbol{S(0) = 1}$ であり, $\boldsymbol{S'(t) = AS(t)}$ $(\boldsymbol{t \geq 0})$ である。

$$\boldsymbol{S(t) = 1 + A\int_0^t S(s)\,ds \quad (t \geq 0)} \tag{3}$$

目的： (3) を満たすような $\boldsymbol{S(t)}$ $(\boldsymbol{t \geq 0})$ を構成する。

関数の列 $\{S_n(t)\}_{n=0,1,2,\ldots}$ を次のように定める。$S_0(t) = 1$ $(t \geq 0)$ とする。n を自然数とし, 連続関数 $S_{n-1}(t)$ $(t \geq 0)$ が定まったとき, 漸化式

$$S_n(t) = 1 + A\int_0^t S_{n-1}(s)\,ds \quad (t \geq 0) \tag{4}$$

により連続関数 $S_n(t)$ $(t \geq 0)$ を定める。このとき, 極限関数 $S(t) = \lim_{n\to\infty} S_n(t)$ により, 積分方程式

$$S(t) = 1 + A\int_0^t S(s)\,ds \quad (t \geq 0)$$

を満たす連続関数 $S(t)$ $(t \geq 0)$ の構成法を**逐次近似法**という。

問題

漸化式 (4) により定まる関数の列の一般項 $S_n(t)$ を求めよ。

解説

$t \geq 0$ に対して, $S_0(t) = 1$, $S_1(t) = 1 + A\int_0^t S_0(s)ds = 1 + At$, $S_2(t) = 1 + A\int_0^t S_1(s)\,ds = 1 + At + \frac{(At)^2}{2}$ であり, すべての非負の整数 n に対して, $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(At)^k}{k!}$ であると推測できる。 数学的帰納法によりこの推測が正しいことを示せばよい。

次の式により, $S(t)$ $(t \geq 0)$ を構成できると考えられる。

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} \quad (t \geq 0)$$

マクローリン展開

関数 $f(x)$ が次のような級数に展開されるとき, $f(x)$ は マクローリン展開可能であるといわれる。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad (\text{マクローリン展開})$$

たとえば, $f(x) = e^x$ はマクローリン展開可能であり,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < \infty)$$

差分法

微分方程式の**微分**を**差分**におきかえて得られる**差分方程式**を考え，その解の極限として微分方程式の解を求める方法を**差分法**という。

－　次を満たす $S(t)$ $(t \geq 0)$ の差分法による構成方法　－

$$S(0) = 1, \qquad S'(t) = AS(t) \ (t \geq 0)$$

$S'(t) = AS(t)$ の代わりに，

$$S'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

であるから，$h > 0$ が $Ah < 1$ を満たすとき，$\widetilde{S}(0) = 1$ とし，

$$\frac{\widetilde{S}(t - h) - \widetilde{S}(t)}{-h} = A\widetilde{S}(t) \quad (t \geq h)$$

を考える。この方程式を**後退差分方程式**という。

差分方程式 $\dfrac{\widetilde{S}(t-h)-\widetilde{S}(t)}{-h}=A\widetilde{S}(t)\ (t \geq h)$ の解法

$$(1-hA)\widetilde{S}(t)=\widetilde{S}(t-h)\ (t \geq h)$$

であるから, すべての自然数 n について, $t=nh$ とすると,

$$\widetilde{S}(nh)=(1-hA)^{-1}\widetilde{S}((n-1)h)$$

であるので, $\widetilde{S}(0)=1$ と合わせると,

$$\widetilde{S}(nh)=(1-hA)^{-n} \quad (n \geq 0)$$

等比数列

$a_1=a,\ a_{n+1}=ra_n$ のとき, $a_n=ar^{n-1}$ である。

$\widetilde{S}(t)$ は $S(t)$ を近似したものなので,

$$\widetilde{S}(nh) = (1 - hA)^{-n} \quad (n \geq 0)$$

において, $t = nh$ のときを考えれば,

$$S(t) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{t}{n}A\right)^{-n}$$

により, $S(t)$ $(t \geq 0)$ を構成できると考えられる。

問題

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{t}{n}A\right)^{-n}$ を求めよ。

$$\left(1 - \frac{t}{n}A\right)^{-n} = \left(\left(1 - \frac{t}{n}A\right)^{-\frac{n}{At}}\right)^{At} \to e^{At} \ (n \to \infty)$$

指数関数の構成方法と役割

$$\left.\begin{array}{l} S(0) = 1 \\ S(t)S(s) = S(t+s) \\ \qquad\qquad (t, s \geq 0) \\ S'(0) = A \end{array}\right\} \leftarrow \left\{\begin{array}{l} S(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} \ (t \geq 0) \\ S(t) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{t}{n} A\right)^{-n} \ (t \geq 0) \end{array}\right.$$

$$\downarrow$$

$$u(t) = S(t)u_0 \ (t \geq 0)$$

$$\downarrow$$

$$u'(t) = Au(t) \ (t \geq 0), \quad u(0) = u_0$$

■ ラプラス変換

ラプラス変換

連続関数 $f(t)$ $(t \geq 0)$ に対して, 極限値

$$\mathcal{L}(f)(\lambda) = \lim_{r \to \infty} \int_0^r e^{-\lambda t} f(t)\, dt$$

が存在するとき, この値を $f(t)$ のラプラス変換という。

問題

1. 関数 $S_A(t) = e^{At}$ $(t \geq 0)$ のラプラス変換を求めよ。
2. $S(0) = 1$ と $S'(t) = AS(t)$ $(t \geq 0)$ を満たす $S(t)$ $(t \geq 0)$ のラプラス変換を求めよ。

$S_A(t) = e^{At}$ のラプラス変換

$\lambda > A$ に対して,

$$\begin{aligned}\int_0^r e^{-\lambda t} S_A(t)\,dt = \int_0^r e^{-\lambda t} e^{At}\,dt = \int_0^r e^{-(\lambda - A)t}\,dt &= \left[-(\lambda - A)^{-1} e^{-(\lambda - A)t}\right]_0^r \\ &= (\lambda - A)^{-1}(1 - e^{-(\lambda - A)r}) \\ &\to (\lambda - A)^{-1} \quad (r \to \infty)\end{aligned}$$

であるから,

$$\mathcal{L}(S_A)(\lambda) = \lim_{r\to\infty} \int_0^r e^{-\lambda t} S_A(t)\,dt = (\lambda - A)^{-1} \ (\lambda > A)$$

である。　　(公式) $a \neq 0$ に対して, $\int e^{ax}\,dx = a^{-1}e^{ax} + C$

$S(0)=1$ と $S'(t)=AS(t)$ を満たす $S(t)$ のラプラス変換

$r>0$ に対して,

$$A\int_0^r e^{-\lambda t}S(t)\,dt=\int_0^r e^{-\lambda t}S'(t)\,dt$$

$$=[e^{-\lambda t}S(t)]_0^r-\int_0^r(-\lambda)e^{-\lambda t}S(t)\,dt \qquad \text{(部分積分法)}$$

$$=e^{-\lambda r}S(r)-S(0)+\lambda\int_0^r e^{-\lambda t}S(t)\,dt$$

である。$r\to\infty$ とすると, $A\mathcal{L}(S)(\lambda)=-1+\lambda\mathcal{L}(S)(\lambda)$ であるから,

$$\mathcal{L}(S)(\lambda)=(\lambda-A)^{-1}$$

ラプラス変換の一意性により,

$$S(t)=S_A(t)=e^{At}\ (t\geq 0)$$

- 熱方程式：熱の伝わり方を表す方程式

両端が常に $\mathbf{0}$°C に保たれている長さ $\boldsymbol{l}$ の金属棒について，最初の時刻 $\boldsymbol{t=0}$ のときの金属棒の温度分布を $\boldsymbol{u_0(x)}$ $\boldsymbol{(0<x<l)}$，時刻 $\boldsymbol{t}$，座標 $\boldsymbol{x}$ における温度分布を $\boldsymbol{\theta(x,t)}$ で表すと，**偏微分方程式**

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\theta_t(x,t)=\theta_{xx}(x,t)} && \boldsymbol{(0<x<l,\ t\geq 0)} && \text{(熱方程式)}\\
&\boldsymbol{\theta(0,t)=\theta(l,t)=0} && \boldsymbol{(t\geq 0)} && \text{(境界条件)}\\
&\boldsymbol{\theta(x,0)=u_0(x)} && \boldsymbol{(0<x<l)} && \text{(初期条件)}
\end{aligned}
$$

を満たすことが知られている。

関数空間の導入

X を区間 $(0, l)$ で定義された実数値可測関数 f で

$$\int_0^l |f(x)|^2\, dx < \infty$$

を満たすもの全体の集合とし，$f, g \in X$ に対して，

$$f = g \iff f(x) = g(x)\ (a.e.)$$

と定める。X に内積

$$\langle f, g \rangle = \int_0^l f(x)g(x)\, dx \quad (f, g \in X)$$

を定めると，X はヒルベルト空間になることが知られている。

1. ルベーグ積分＝リーマン積分の完備性の欠如を改良する積分
2. ヒルベルト空間＝完備な内積を備えたベクトル空間

内積

1. $\langle f, f\rangle \geq 0\ (f \in X)$, $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$
2. $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle\ (f, g \in X)$
3. 任意の実数 α, β と $f, g, h \in X$ に対して
   $\langle \alpha f + \beta g, h\rangle = \alpha\langle f, h\rangle + \beta\langle g, h\rangle$

例

任意のベクトル $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$ に対して,
$\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = x_1y_1 + x_2y_2\ (= \vec{x}\cdot\vec{y})$ と定めると，上の条件を満たす。

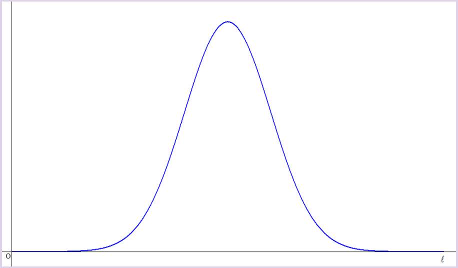
微分の概念の拡張に向けて

- 2 次方程式 $\boldsymbol{x^2 - 2 = 0}$ の有理数解, 実数解は？

  有理数全体の集合 $\subsetneq$ 実数全体の集合 (数の概念の拡張)
- 偏微分方程式の解は？

  微分可能な関数全体の集合 $\subsetneq$ $*\,*\,*\,*$ な関数全体の集合

$\boldsymbol{\phi \in C_0^\infty(0, l)}$ により, ある区間 $\boldsymbol{[c, d] \subset (0, l)}$ に対して $\boldsymbol{\phi(x) = 0 \ (x \notin [c, d])}$ を満たす何回でも微分可能な関数を表すことにする。このような関数を**テスト関数**という。



f を区間 $[0,l]$ で定義された微分可能な関数で, 導関数 f' が連続なものとすると, 部分積分法により, 次が成り立つ。

$$\begin{aligned}\int_0^l f(x)\phi'(x)\,dx &= [f(x)\phi(x)]_0^l - \int_0^l f'(x)\phi(x)\,dx \\ &= -\int_0^l f'(x)\phi(x)\,dx \qquad (\phi \in C_0^\infty(0,l))\end{aligned}$$

弱微分

$f \in X$ に対して,

$$\int_0^l f(x)\phi'(x)\,dx = -\int_0^l g(x)\phi(x)\,dx \quad (\phi \in C_0^\infty(0,l))$$

を満たす $g \in X$ が存在するとき, この g を f の**弱微分** と呼び, f' で表すことにする。

例

$f(x) = |x|$ $(-1 < x < 1)$ は弱微分可能で, その弱微分は,

$$H(x) = \begin{cases} -1 & (-1 < x < 0) \\ 1 & (0 < x < 1) \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} |x|\phi'(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (-x)\phi'(x)\,dx + \int_{0}^{1} x\phi'(x)\,dx$$

$$= [-x\phi(x)]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} (-1)\phi(x)\,dx + [x\phi(x)]_{0}^{1} - \int_{0}^{1} \phi(x)\,dx$$

$$= -\left(\int_{-1}^{0} (-1)\phi(x)\,dx + \int_{0}^{1} \phi(x)\,dx\right)$$

$$= -\int_{-1}^{1} H(x)\phi(x)\,dx \qquad (\phi \in C_0^{\infty}(-1,1))$$

作用素

関数空間 $H_0^1(0,l)$: 弱微分可能で $f(0)=f(l)=0$ を満たす $f \in X$ の全体の集合

X の部分集合 D を次により定める。

$$f \in D \Leftrightarrow f \in H_0^1(0,l) \text{ で, 弱微分 } f' \text{ は弱微分可能である}$$

作用素 $A: D \to X$ を次により定める。

$$Af = (f')' \ (=: f'') \quad (f \in D)$$

関数空間における微分方程式の初期値問題

作用素 $A : D \to X$ に対する微分方程式の初期値問題

$$u'(t) = Au(t) \quad (t \geq 0), \qquad u(0) = u_0 \tag{ACP}$$

各 $t \geq 0$ に対して $u(t) \in D$ $(\subset X)$ であるとは?

$u(t) \in H_0^1(0,l)$ であり, 弱微分 $u(t)'$ は弱微分可能である。
$\theta(x,t) = (u(t))(x)$ $(0 < x < l)$ と表すと, $\theta(x,t)$ は x に関して, 2 回弱微分可能で, $\theta(0,t) = (u(t))(0) = 0$ $(t \geq 0)$ であり, $\theta(l,t) = (u(t))(l) = 0$ $(t \geq 0)$ を満たす。

$u'(t) = Au(t)$ $(t \geq 0)$

$$\begin{aligned}\theta_t(x,t) &= (u'(t))(x) = (Au(t))(x) \\ &= (u(t))''(x) = \theta_{xx}(x,t) \quad (0 < x < l)\end{aligned}$$

1 部での話題

実数 A により指数関数 $S(t)$ $(t \geq 0)$ を構成できれば, 初期値問題

$$u'(t) = Au(t) \quad (t \geq 0), \quad u(0) = u_0$$

の解を $u(t) = S(t)u_0$ $(t \geq 0)$ により与えることができる。

$\longrightarrow$ 作用素 A により指数関数 $S(t)$ $(t \geq 0)$ を構成することができれば,

$$u(t) = S(t)u_0 \quad (t \geq 0)$$

により, (ACP) の解を求められると期待される。この $S(t)$ $(t \geq 0)$ を作用素半群という。

実は, 熱方程式の場合には,

$$S(t)u_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n u_0$$

により指数関数を構成できない。しかし,

$$S(t)u_0 = \lim_{n\to\infty} \left(I - \frac{t}{n} A \right)^{-n} u_0$$

により構成できることが知られている。

作用素半群の理論と発展方程式

関数空間上の指数関数の構成方法と偏微分方程式の初期値問題への応用を研究する分野

作用素半群の生成定理

X をヒルベルト空間とし, 線形作用素 $A: D(\subset X) \to X$ が

(A1) ある正数 ω が存在して $\langle Af, f\rangle \le \omega ||f||^2 \ \ (f \in D)$,

(A2) 任意の $g \in X$ と $h\omega < 1$ を満たす任意の $h > 0$ に対して, $f - hAf = g$ を満たす $f \in D$ が存在する

を満たすとする。このとき, 作用素半群

$$S(t)f = \lim_{n\to\infty}\left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n} f \quad (t \ge 0, f \in X)$$

を構成できる。ただし,

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} \quad (f \in X)$$

微分方程式の初期値問題

X をヒルベルト空間とし, 線形作用素 $A : D(\subset X) \to X$ は条件 (A1), (A2) を満たすとし, $S(t)$ $(t \geq 0)$ を作用素半群とする。このとき, 各 $u_0 \in D$ に対して, 初期値問題

$$u'(t) = Au(t) \ (t \geq 0), \quad u(0) = u_0$$

はただ 1 つの解 $u(t) = S(t)u_0$ $(t \geq 0)$ をもつ。さらに, $v(t)$ を v_0 が初期値である解とするとき, 次の解の初期値に関する連続的依存性が成り立つ。

$$\|u(t) - v(t)\| \leq e^{\omega t}\|u_0 - v_0\| \quad (t \geq 0)$$

作用素 $Af = f''$ $(f \in D)$ が条件 (A1) を満たすこと

$f \in D$ ならば, $f \in H_0^1(0,l)$ であり, 弱微分の定義より,

$$\int_0^l (Af)(x)\phi(x)\,dx = -\int_0^l f'(x)\phi'(x)\,dx \ (\phi \in H_0^1(0,l))$$

を満たすので, 次が成り立つ。

$$\begin{aligned}\langle Af, f\rangle &= \int_0^l (Af)(x)f(x)\,dx \\ &= -\int_0^l f'(x)f'(x)\,dx \le 0 \quad (f \in D)\end{aligned}$$

作用素 $Af = f''$ $(f \in D)$ が条件 (A2) を満たすこと

$h > 0$, $g \in X$ とする。$H_0^1(0,l)$ 上の作用素 G を

$$G(\phi) = \langle g, \phi \rangle \quad (\phi \in H_0^1(0,l))$$

により定める。また, 任意の $f \in D$, $\phi \in H_0^1(0,l)$ に対して,

$$\int_0^l \{f(x)\phi(x) + hf'(x)\phi'(x)\}\,dx = \langle f - hAf, \phi \rangle$$

であるから, $H_0^1(0,l)$ における内積を

$$(f,\phi) = \int_0^l \{f(x)\phi(x) + hf'(x)\phi'(x)\}dx \ (f,\phi \in H_0^1(0,l))$$

により定めると, $f - hAf = g$ を満たす $f \in D$ を求める問題は, $(f,\phi) = G(\phi)$ $(\phi \in H_0^1(0,l))$ を満たす $f \in H_0^1(0,l)$ を求める問題へ変換される。この問題はリースの表現定理により解くことができる。

リースの表現定理

ヒルベルト空間 $\boldsymbol{H}$ 上の実数値連続線形作用素 $\boldsymbol{G}$ に対して，$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\phi})$ $(\boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{H})$ を満たす $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}$ がただ１つ存在する。ただし，$(\cdot,\cdot)$ は $\boldsymbol{H}$ の内積を表す。

問題

$\boldsymbol{G}$ は平面上のベクトルに実数を対応させる写像で，すべての実数 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ と平面上のベクトル $\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}}$ について

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha}\vec{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\beta}\vec{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{G}(\vec{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{G}(\vec{\boldsymbol{y}}) \qquad \text{(線形性)}$$

を満たすとする。このとき，平面上のすべてのベクトル $\vec{\boldsymbol{x}}$ について $\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{G}(\vec{\boldsymbol{x}})$ を満たすベクトル $\vec{\boldsymbol{a}}$ が存在することを示せ。

解答例

$\vec{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2})$ を平面上の任意のベクトルとする。$\vec{\boldsymbol{e}}_1 = (\mathbf{1},\mathbf{0})$，$\vec{\boldsymbol{e}}_2 = (\mathbf{0},\mathbf{1})$ とし，$\vec{\boldsymbol{a}} = (\boldsymbol{G}(\vec{\boldsymbol{e}}_1),\boldsymbol{G}(\vec{\boldsymbol{e}}_2))$ とおく。 このとき，$\vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x_1}\vec{\boldsymbol{e}}_1 + \boldsymbol{x_2}\vec{\boldsymbol{e}}_2$ であるから，線形性より，$\boldsymbol{G}(\vec{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{x_1}\boldsymbol{G}(\vec{\boldsymbol{e}}_1) + \boldsymbol{x_2}\boldsymbol{G}(\vec{\boldsymbol{e}}_2) = \vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}$ である。

現在の研究と今後の課題

現在の研究

解の初期値に関する連続的依存性に着目して, **バナッハ空間におけるリプシッツ作用素半群**の生成定理を研究しています。

- ヒルベルト空間ではなくバナッハ空間である関数空間の例が存在する − L^1 空間など
- 解が初期値にリプシッツ連続的に依存する例が存在する − Kirchhoff 方程式などの非線形波動方程式への応用

今後の課題

線形構造をもたない**距離空間**における研究が活発化するかもしれません。これに関して, 現在, 次の研究を手掛けています。

1. *mutational analysis*
2. 距離空間における勾配流