量子空間の世界
—非可換方程式を解いてみよう—

毛利　出

静岡大学理学部数学科

2015 年 11 月 26 日 (木)

サイエンスカフェ **in** 静岡 第 **101** 話

[0]

1. 第 1 部　—方程式の行列解—(行列の範囲で方程式を解く)

2. 第 2 部　—量子空間—(非可換方程式を解く)

第1部
—方程式の行列解—
(行列の範囲で方程式を解く)

方程式を解く

方程式を解く

- $x + 2 = 0, \quad x = -2.$ $\longleftarrow$ 負の整数.
- $2x - 1 = 0, \quad x = \dfrac{1}{2}.$ $\longleftarrow$ 有理数.
- $x^2 - 2 = 0, \quad x = \pm\sqrt{2}.$ $\longleftarrow$ 実数.
- $x^2 + 2 = 0, \quad x = \pm\sqrt{-2}.$ $\longleftarrow$ 複素数.

注意

- どこの範囲で 解を求めるかが大切！！

代数学の基本定理

定理 (代数学の基本定理)

- $\mathbb{C}$ を複素数全体の集合とする.
- 任意の方程式

$$f(x) = a_d x^d + \cdots + a_0 = 0, \quad (a_i \text{は複素数}, d \geq 1)$$

は $\mathbb{C}$ 内に解を持つ.

- 上の定理が成り立つような係数体のことを 代数的閉体 とよぶ.
- 複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ は代数的閉体の典型的な例である.

問題

複素数の範囲の方程式

- $x^2 - 1 = 0$ を解け.
  - $(x-1)(x+1) = 0$.
  - $x - 1 = 0$ または $x + 1 = 0$.
  - $x = 1$ または $x = -1$.

$\rightsquigarrow$ 上の方程式を, <u>行列</u> の範囲で考えてみよう!

行列

定義 (行列)

- $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ を 2×2 複素行列全体の集合とする.
- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $(a,\, b,\, c,\, d$ は複素数$)$.

例

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$.

行列の定数倍

定義 (行列の定数倍)

- 定数倍: $tA = t\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta & tb \\ tc & td \end{pmatrix}$, ($t$ は複素数).

例 (行列の定数倍)

- $2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.
- $(-3)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3)\cdot 2 & (-3)\cdot 3 \\ (-3)\cdot 1 & (-3)\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ -3 & -12 \end{pmatrix}$.

行列の和・差

定義 (行列の和・差)

- 和: $A+B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}.$
- 差: $A-B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{pmatrix}.$

例 (行列の和・差)

- 和: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2 & 3+3 \\ 2+1 & 4+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$
- 差: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-7 & 3-5 \\ 1-4 & 4-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$

行列の積

定義 (行列の積)

- 積: $AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$.

例

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot2+3\cdot1 & 1\cdot3+3\cdot4 \\ 2\cdot2+4\cdot1 & 2\cdot3+4\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 8 & 22 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} =$
  $\begin{pmatrix} 3\cdot(-2)+2\cdot3 & 3\cdot4+2\cdot(-6) \\ (-6)\cdot(-2)+(-4)\cdot3 & (-6)\cdot4+(-4)\cdot(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} =$
  $\begin{pmatrix} 7\cdot3+5\cdot(-4) & 7\cdot(-5)+5\cdot7 \\ 4\cdot3+3\cdot(-4) & 4\cdot(-5)+3\cdot7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

行列の積は交換可能ではない!

注意

- 一般に, 行列の積 AB は, 通常の数の積のように交換可能ではない!
- つまり, 一般的に行列の積に関して, $AB \neq BA$ である.

例

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 8 & 22 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 2 & 2\cdot 3 + 3\cdot 4 \\ 1\cdot 1 + 4\cdot 2 & 1\cdot 3 + 4\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 18 \\ 9 & 19 \end{pmatrix}$.
- よって, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ である.

零行列・単位行列

定義 (零行列・単位行列)

- $O := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: 零行列.
- $I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: 単位行列.

- 任意の行列 A に対して,
  - $A + O = O + A = A$,
  - $AO = OA = O$,
  - $AI = IA = A$ が成り立つ.

- 零行列 O は 0 の役割
- 単位行列 I は 1 の役割を果たしている!

行列の範囲で方程式を解く

複素数の範囲の方程式 (再掲)

- $f(x) = x^2 - 1 = 0$ を解け.
  - (i) $x^2 - 1 = 0$.
  - (ii) $(x-1)(x+1) = 0$.
  - (iii) $x - 1 = 0$ または $x + 1 = 0$.
  - (iv) $x = 1$ または $x = -1$.

$\rightsquigarrow$ 行列の範囲で考える.

問題

- $f(X) = X^2 - I = O$ を解け.
- つまり, $f(A) = A^2 - I = O$ を満たす行列 A を求めよ!

問題

因数分解での方法

(i) $X^2 - I = O.$

(ii) $(X - I)(X + I) = O.$

(iii) $X - I = O$ または $X + I = O.$

(iv) $X = I$ または $X = -I.$

実際,

- $f(I) = I^2 - I = O.$
- $f(-I) = (-I)^2 - I = O.$
- $\pm I$ は解である.

解

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ を $f(X) = X^2 - I = O$ に代入すると,

$$\begin{aligned} f(A) = A^2 - I &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4-3 & 6-6 \\ -2+2 & -3+4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O. \end{aligned}$$

- $\pm I$ 以外にも解がある!
- (i)–(iv) のどこで間違っているのだろうか?

$\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ は整域ではない!

- (i)$\Longleftrightarrow$(ii) は成立している:

$$\begin{aligned}(X-I)(X+I) &= X\cdot X - I\cdot X + X\cdot I - I\cdot I \\ &= X^2 - X + X - I = X^2 - I.\end{aligned}$$

- 実は, (ii)$\Longrightarrow$(iii) が間違っている!
  - (ii) $(X-I)(X+I)=O$.
  - (iii) $X-I=O$ または $X+I=O$.

注意

- 一般に, 行列 A, B に対して,
「$\underline{AB=O \Longrightarrow A=O \text{ または } B=O}$」は成り立たない.
- $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ は 整域 ではない!

$X^2 - I = O$ は無限個解を持つ

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする.
- $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ba+bd \\ ca+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$
- $\begin{cases} a^2+bc = 1, \\ b(a+d) = 0, \\ c(a+d) = 0, \qquad \longleftarrow b \neq 0 \text{ のとき}, \ c = \dfrac{1-a^2}{b}, d = -a, \\ bc+d^2 = 1. \end{cases}$
- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \dfrac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$ は $A^2 = I$ を満たす.

結論

- $X^2 - I = O$ は無限個解を持つ!

ケイリー・ハミルトンの定理

定理 (ケイリー・ハミルトン)

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は,

$$X^2 - (\mathrm{tr}\, A)X + (\det A)I = O$$

の解である.

- ただし, $\mathrm{tr}\, A := a + d$ (A の <u>トレース</u>),
- $\det A := ad - bc$ (A の <u>行列式</u>) である.

例

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ とすると,
  - $\mathrm{tr}\, A = 2 + (-2) = 0$,
  - $\det A = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) = -1$ であるので,
  - A は $X^2 - 0X + (-1)I = X^2 - I = O$ の解である.

ケイリー・ハミルトンの定理の逆は成り立つ?

注意

- 一般に, ケイリー・ハミルトンの定理の逆 は成り立たない.
- つまり, A が $X^2 - \alpha X + \beta I = O$ の解ならば, $\operatorname{tr} A = \alpha$, $\det A = \beta$ は成り立たない!

- I は $X^2 - I = O$ の解である.
- $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\operatorname{tr} I = 1 + 1 = 2 \neq 0$, $\det I = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \neq -1$.

第2部
—量子空間—
(非可換方程式を解く)

正則行列

定義 (正則行列)

- 行列 P が 正則 であるとは, $P^{-1}P = PP^{-1} = I$ を満たす行列 P^{-1} が存在するときをいう.
- P^{-1} を P の 逆行列 とよぶ.

逆行列の公式

- P が正則 $\iff$ P の行列式 $\det P \neq 0$.
- $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると, P の逆行列 P^{-1} は

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

で与えられる.

例

- $P = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ とする.
- このとき, P の行列式 $\det P = 7 \cdot 3 - 5 \cdot 4 = 1 \neq 0$ であるので, P は正則である.
- よって, 次のような, P の逆行列 P^{-1} が存在する:
$P^{-1} = \dfrac{1}{\det P} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$.
- $PP^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21-20 & -35+35 \\ 12-12 & -20+21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.
- $P^{-1}P = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21-20 & 15-15 \\ -28+28 & -20+21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.

相似

定義 (相似)

- 行列 A と B が相似であるとは, ある正則行列 P が存在し, $B = P^{-1}AP$ とかけるときをいう.
- このとき, $A \sim B$ とかく.

例

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ とする.
- 正則行列 $P = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とその逆行列の $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ を取ると, $B = P^{-1}AP$ である.
- よって, A と B は相似 ($A \sim B$) である.

相似な行列と方程式の解

定理

行列 A と B は相似 ($A \sim B$) であるとする.
このとき, $f(X) = X^2 + \alpha X + \beta I$ (α, β は複素数) に対して,
A が $f(X) = O$ の解である $\Longleftrightarrow$ B が $f(X) = O$ の解である.

Proof.

$f(A) = O$ とすると,

$$\begin{aligned} f(B) &= f(P^{-1}AP) = (P^{-1}AP)^2 + \alpha P^{-1}AP + \beta I \\ &= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) + \alpha P^{-1}AP + \beta P^{-1}P \\ &= P^{-1}A^2P + \alpha P^{-1}AP + \beta P^{-1}IP \\ &= P^{-1}(A^2 + \alpha A + \beta I)P = P^{-1}f(A)P = P^{-1}OP = O. \end{aligned}$$

□

- 上の定理により, 相似な解は同一視する.

ジョルダン標準型

定理 (ジョルダン標準型)

任意の 2×2 複素行列 A は,

$$A \sim \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \left(\sim \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right) \quad \text{(Case I)}$$

または,

$$A \sim \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{(Case II)}$$

である.

- 上の右辺を, A の ジョルダン標準型 という.
- ジョルダン標準型は, "ほぼ" 一意的である.

ジョルダン標準型と方程式の解

命題

行列 A が方程式 $f(X) = O$ の解である

$\iff$ 行列 A のジョルダン標準型 J が方程式 $f(X) = O$ の解である.

例

$f(X) = X^2 - I$ を考える.

$$\text{(Case I)} \quad J^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

$$\iff a^2 = d^2 = 1.$$

$$\iff a = \pm 1,\ d = \pm 1.$$

よって, Case I の解は相似を除いて 3 つである:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ジョルダン標準型と方程式の解(続き)

$$(\text{Case II})\quad J^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

$$\iff a^2 = 1,\ 2a = 0.$$

これを満たす a は存在しない.

- Case I, Case II を考えると, 相似を除いて 3 つの解が得られる.
- 任意の解は,
  - $P^{-1}IP = I$,
  - $P^{-1}(-I)P = -I$,
  - $P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P \quad (P\text{: 正則行列})$

  で全て与えられる.
- $P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P$ は, ケイリー・ハミルトンの定理より得られる無限個の解である.

問題

問題

- $f(X) = X^2 = O$ を解け.

解

- $J^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O \Longleftrightarrow a = d = 0.$
  - $P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P = O.$
- $J^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O \Longleftrightarrow a = 0.$
  - $P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P. \longleftarrow$ 無限個の解.

$\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ は非可換である!

$\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ は非可換

- 行列の積は一般に非可換であった．つまり，行列 A, B に対して，$AB \neq BA$ である．
- よって，$f(X,Y) = XY = O$ の解と，$g(X,Y) = YX = O$ の解とは異なる．
- $f(X,Y) = \alpha XY + \beta YX \neq (\alpha + \beta)XY$ (α, βは複素数).

非可換方程式を解く

例

$f(X,Y) = XY - YX$ を考える.

行列の組 (A,B) が $f(X,Y) = O$ の解である.
$\iff AB = BA.$ $\longleftarrow$ 可換な行列 を 2 つ持ってくると解になる.

例えば, 可換な行列 は以下のようなものがある:

- $AO = OA.$ (A,O) は解.
- $AI = IA.$ (A,I) は解.
- $AA = AA.$ (A,A) は解.
- $AA^{-1} = A^{-1}A.$ (A,A^{-1}) は解.
- $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ (対角行列). (A,B) は解

非可換方程式を解く (続き)

定理

行列の組 (A, B) が $f(X, Y) = O$ の解である $\Longleftrightarrow$
行列の組 $(P^{-1}AP, P^{-1}BP)$ が $f(X, Y) = O$ の解である (P: 正則行列).

例

$f(X, Y) = XY - YX = O$ の解は, 相似を除いて以下の 2 つである:

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \right),$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & d \\ 0 & b \end{pmatrix} \right).$$

量子 xy 平面

- xy 平面 とは, $f(x, y) = xy - yx = 0$ を満たす点 (a, b) 全体の集合と考えられる.
- $\{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid f(a, b) = ab - ba = 0\} = \mathbb{C}^2$.
- 量子 とは非可換の意味で用いられ, 量子 xy 平面 とは, xy 平面を非可換化したものである.

定理 (秋山, 修士 2 年, 2013)

量子 xy 平面は, 次の $f(x, y) = 0$ を満たす点全体の集合と同型である:

(1) $xy - \alpha yx$, $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$.

(2) $xy - \alpha yx - 1$, $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$.

(3) $xy - yx - x$.

(4) $xy - yx - x^2$.

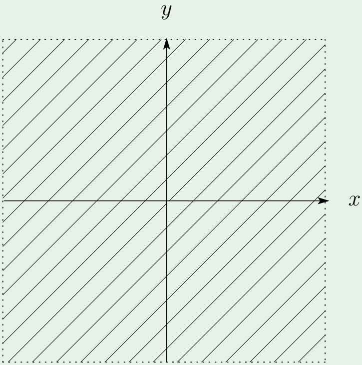
(5) $xy - yx - x^2 - 1$.

量子 xy 平面 (続き)

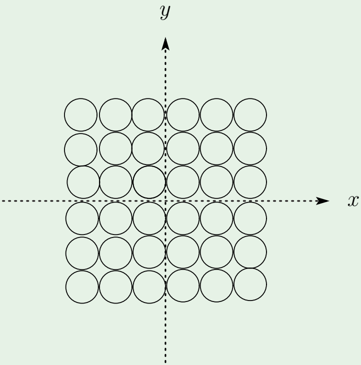
- 次数 n の点とは, $f(A,B)=0$ を満たす $(A,B)\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})^2$ (の既約同値類表現).
- 次数 1 の点とは, $f(a,b)=0$ を満たす $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ (通常の意味の点).

例

$xy-yx$

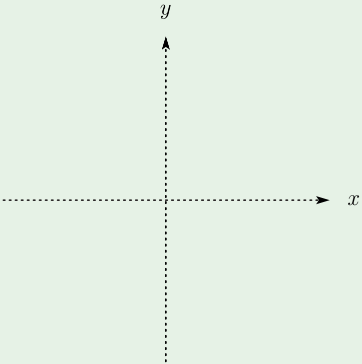


$xy+yx$

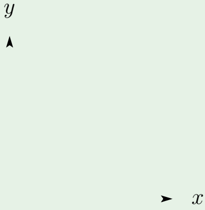


量子 xy 平面 (続き)

$xy - 2yx$



$xy - yx - 1$



注意

- 上の右図は, <u>ワイル平面</u> とよばれるもので, 点はないが曲線はいたるところに存在する.

非可換代数幾何学

“研究者募集中”

演習課題

演習課題

(1) $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ の範囲で $f(X) = X^2 + X + I = O$ を解け.

(2) $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ の範囲で $f(X,Y) = XY - YX - I = O$ を解け.