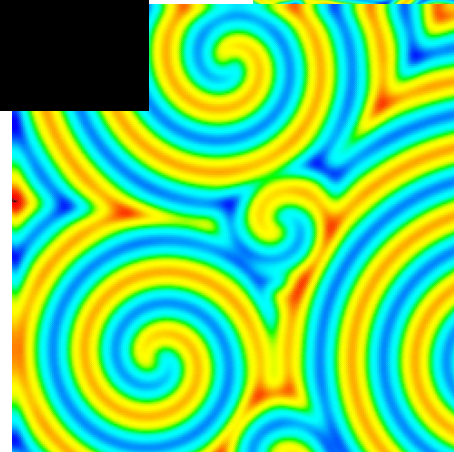
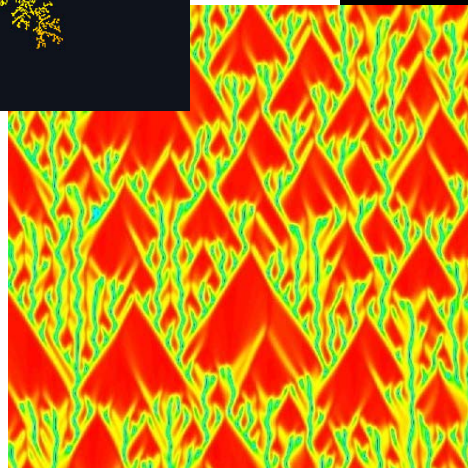
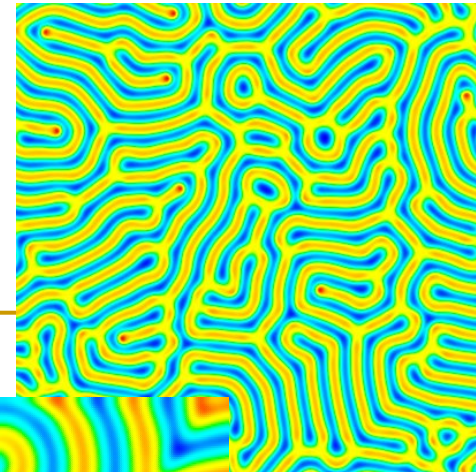
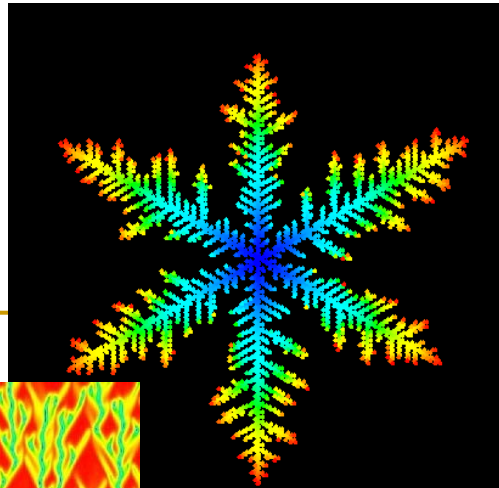
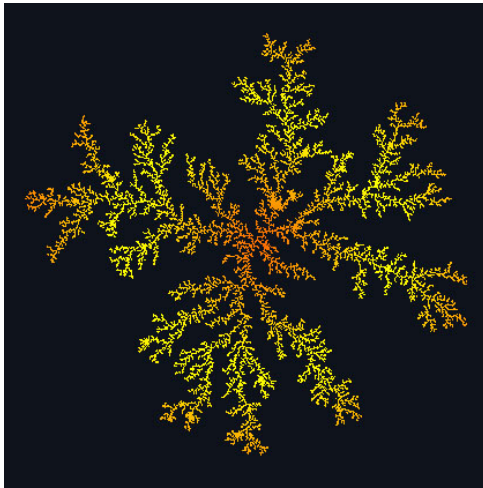


形の不思議

サイエンスカフェ in 静岡

第81話 静岡大学理学研究科 佐藤 信一



講演内容

(前半) フラクタル

I 自然界のさまざまなパターンと3つのキーワード

(1)自己相似性 (2) 非平衡 (3)拡散

II 樹枝状パターンと雪の結晶



(後半) 反応拡散系

III 貝殻の模様

IV 熱帯魚の模様を巡る話



(1) 自然界の自己相似構造

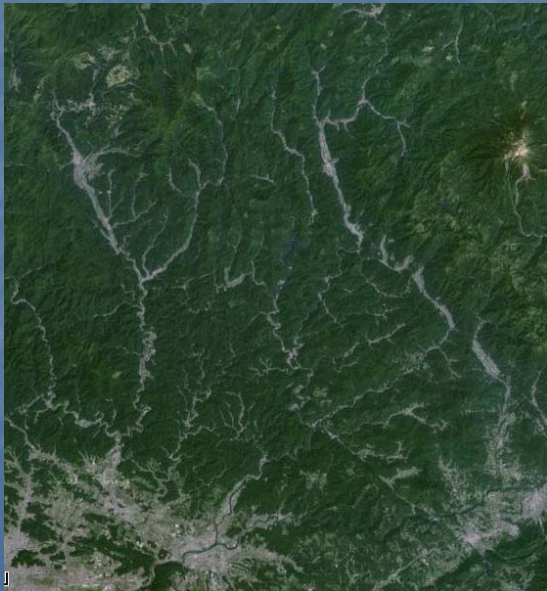
雲



雷



地形



雪の結晶



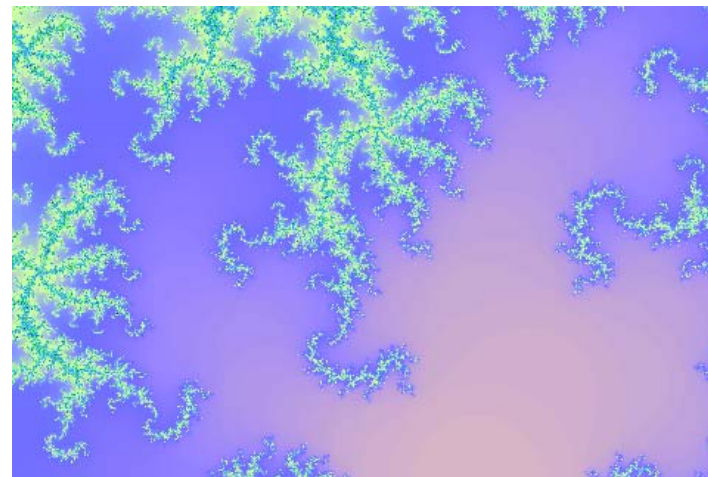
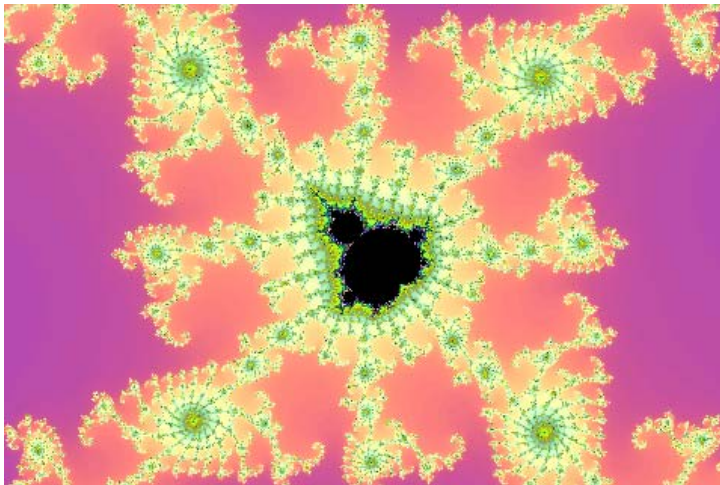
フラクタル（＝自己相似構造）

Benoit B. Mandelbrot

数学者,フラクタル幾何学の創始者
(1924年～2010年)

フラクタルの生みの親
マンデルブロー

海岸線や放電パターンなどは滑らかな線ではなく, 細かく見れば 見るほど凸凹や枝分かれが見えてくる。自己相似なパターンに対してフラクタルという言葉を考案し, 非整数次元で表した。フラクタルは, 数学, 物理学はもとより経済学, 生物学など広い分野で応用された。



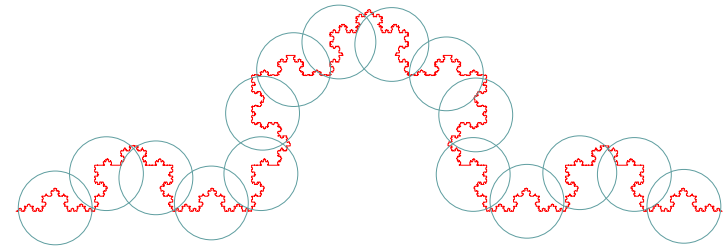
マンデルブローが考えた自己相似集合

非整数次元

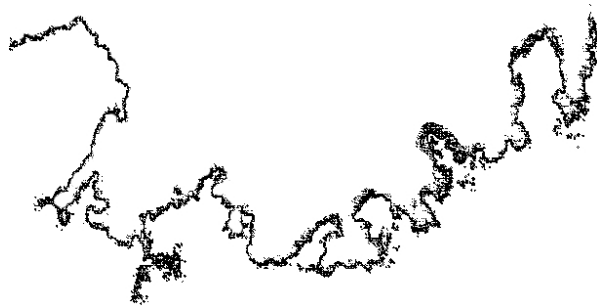
フラクタル次元

曲線を小さい円(または箱)で覆う。そのときに必要な円の個数を数えてフラクタル次元を求める。

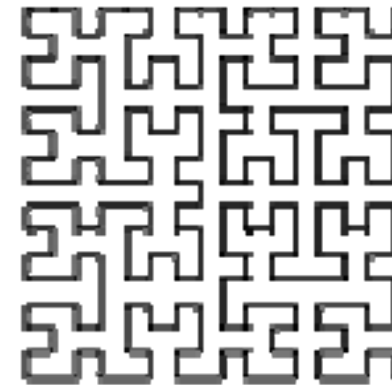
求めた次元の値が2に近いほど、平面を埋め尽くすように複雑に入り組んだ曲線になる



コッホ曲線 1.26次元



若狭湾の海岸線 1.35次元



ペアノ曲線 2次元

形の物理学：日本のパイオニア

寺田寅彦 (1878年～1935年)

物理学者, 随筆家, 俳人。

物理学の多くの分野で活躍し, 夏目漱石とも親交が深かった。金平糖の角やひび割れの形などにも着目した「形の物理学」の先駆的研究者。「天災は忘れた頃にやってくる」は寺田寅彦の言葉とされている。



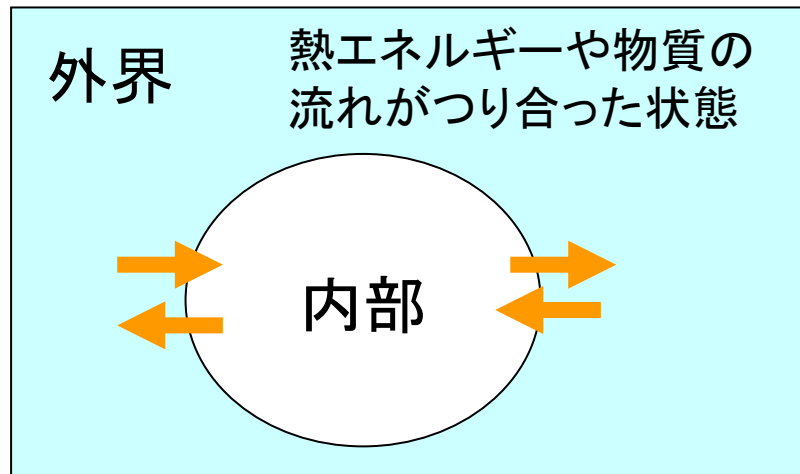
中谷宇吉郎 (1900年～1962年)

物理学者。

雪の結晶の研究を行い, 結晶の詳細な相図(中谷ダイアグラム)の作成, 低温実験室で人口雪の作成に成功。随筆家としても知られ, 「雪は天から送られた手紙である」の言葉を残した。

(2) 自然の多様性を生む非平衡

平衡状態



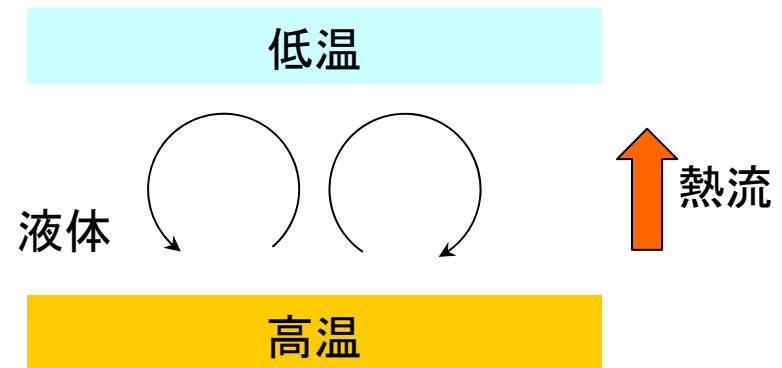
熱いものは冷め、冷たいものは温められる。
熱や物質の出入りがつり合って、一様な状態へ

流れがゼロの**一様な世界**

非平衡 (= 平衡でない)

常に熱や物質の流れがある系
多様な構造をもつ世界

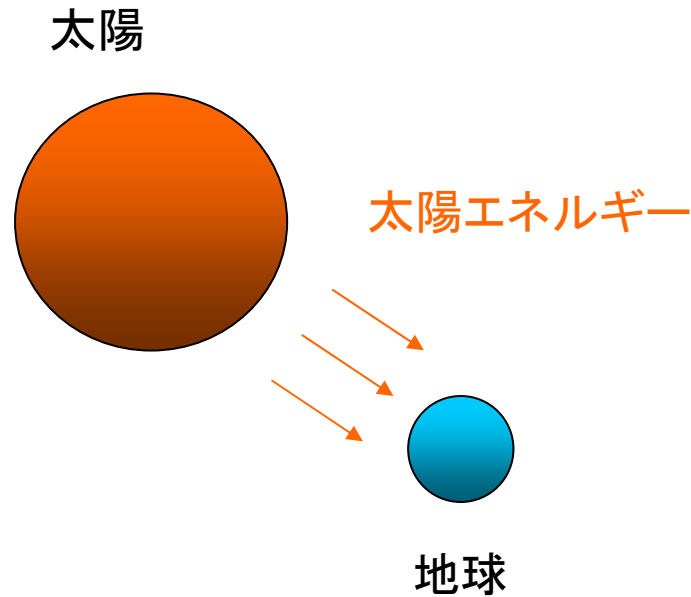
非平衡系の例: 熱対流



散逸構造

地球は大きな非平衡系

地球に多様な構造, 生命活動があるのは, 非平衡系だからこそ



太陽エネルギーがなくなると...

分子が一様に混ざり合った,
生命のない荒涼とした世界に
(エントロピー増大の法則)

結晶成長は典型的な非平衡系

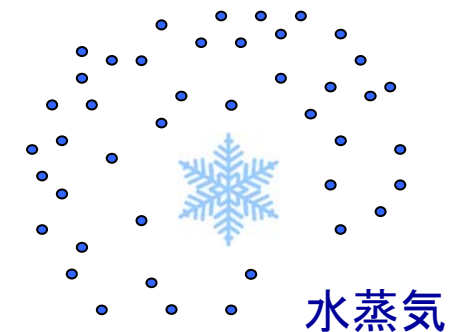
雪の結晶

(空気中の水蒸気が固化した氷の結晶)



結晶の形を決める要因

空気中の
水分子の**拡散** + 結晶表面の
反応

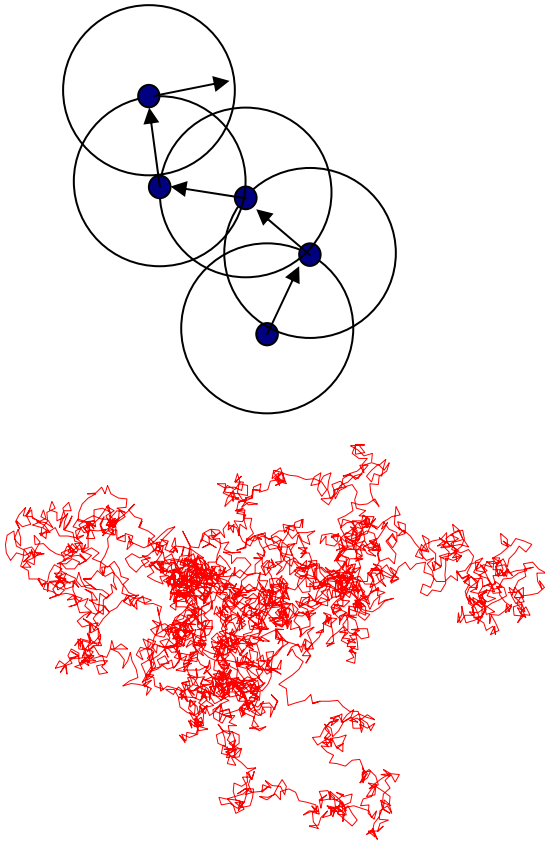


出典: Snowflakes and crystals

<http://www.its.caltech.edu/~atomic/snowcrystals/>

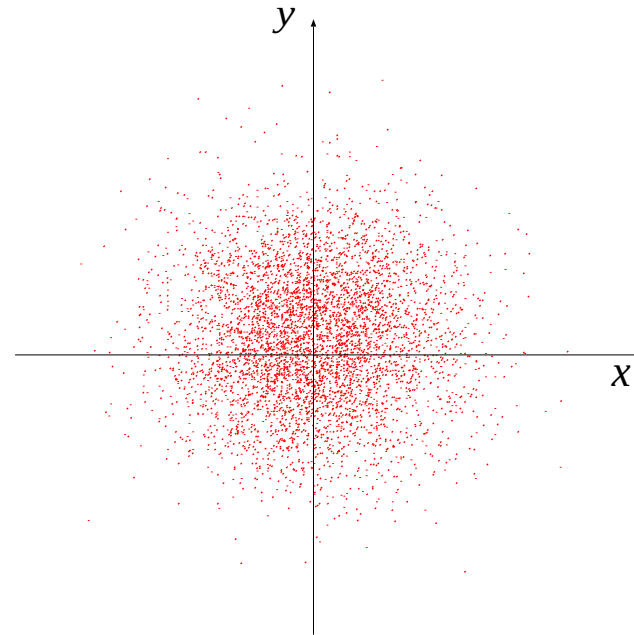
(3) 拡散とは？

1粒子のランダム・ウォーク



粒子の軌跡

平面上で, 原点から5000個の粒子を10000ステップだけランダム・ウォークをさせたときの粒子位置の分布



拡散 = 多数の粒子の
ランダム・ウォーク

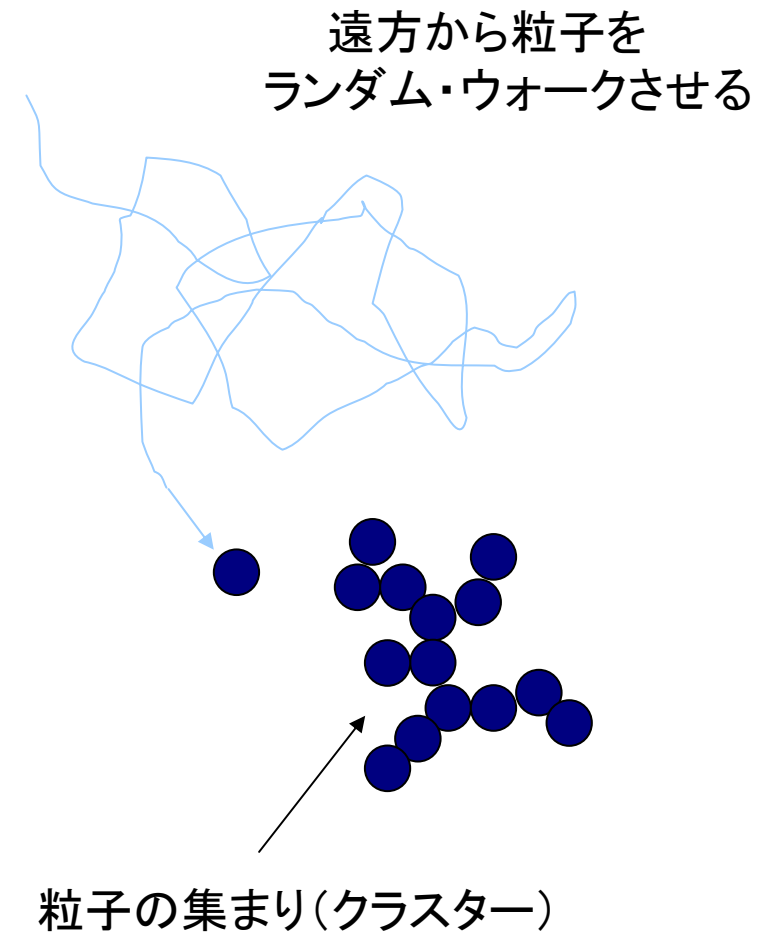
II 樹枝状パターンと雪の結晶

結晶成長の単純化

- 結晶は**粒子の集まり**
- 粒子を**1個ずつランダム・ウォーク**
(拡散粒子の分布の時間変化が無視できる)
- 結晶表面に**粒子が達すれば、すぐに付着**

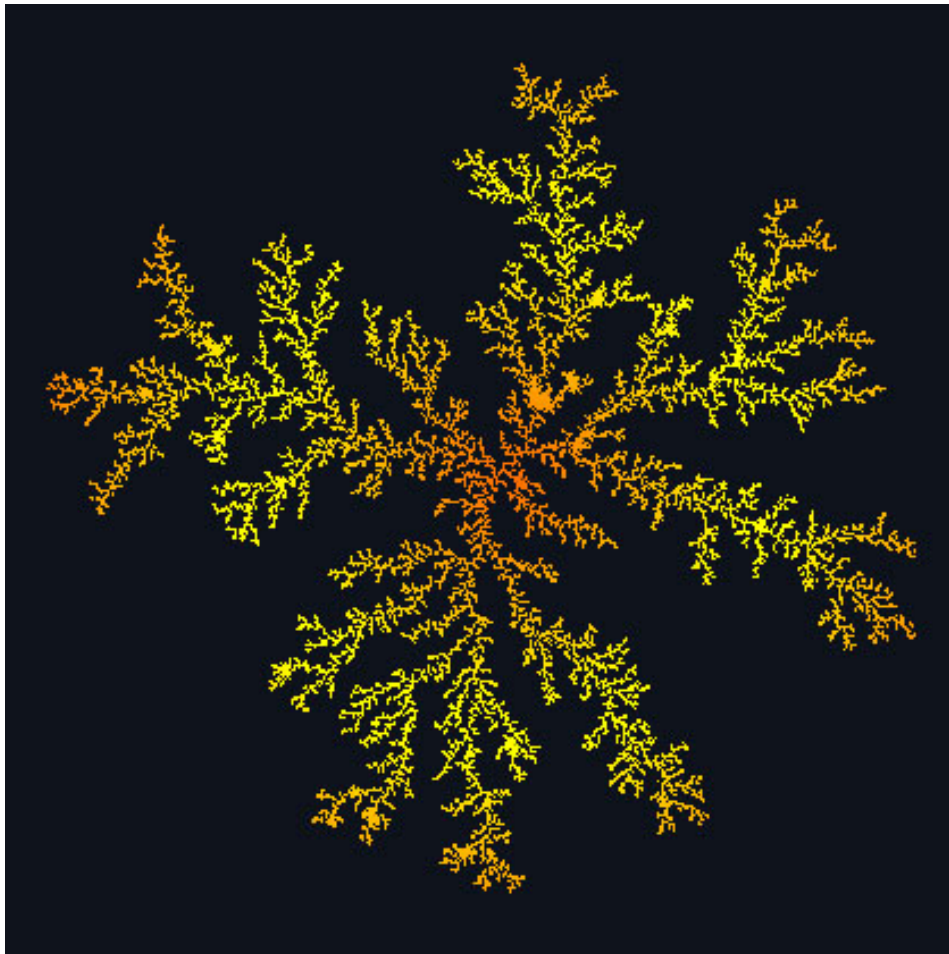
拡散に支配された凝集モデル
Diffusion Limited Aggregation (DLA)

by T. A. Witten and L. M. Sander (1981)



計算機によるDLAパターン

20000粒子のパターン



電気との類似性

粒子が付着する確率 $\Leftrightarrow$ 電気力
(同じ式で表される)

特徴

- 先端に粒子が達する確率が高い
 $\Leftrightarrow$ 先端に電気力が集中
- 枝に囲まれると成長しない
 $\Leftrightarrow$ 金属に囲まれると電気力を
受けない(しゃへい効果)

自然物のDLAパターン

静岡駅前地下広場のエレベーターのまわりの床タイルの模様はDLA？

金属葉(硫酸亜鉛溶液の電析)
放電パターン
寒天上で成長するバクテリア・コロニー
しのぶ石など
自然界にはDLA的パターンが数多く
見受けられる。

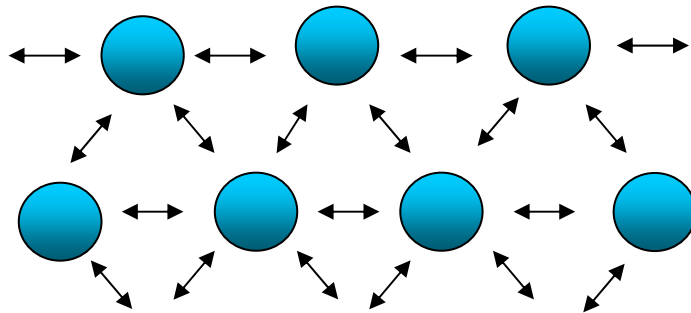
身の周りを探せば、静岡駅前のエレベーター
の床にもDLA的パターンが...



しのぶ石

雪の結晶

表面の分子が受ける力
表面張力



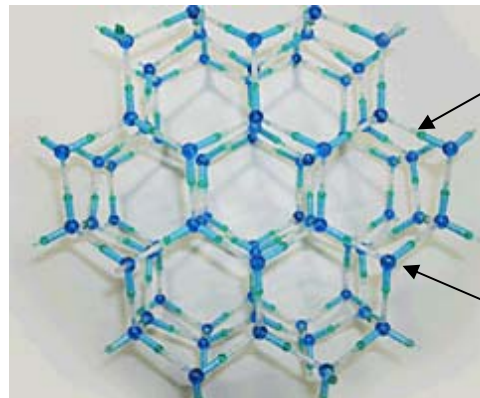
分子の間に働く引力

表面の分子と内部の分子では、
作用する力が異なる。

表面張力は、結晶の
枝の太さ と **異方性** に影響する

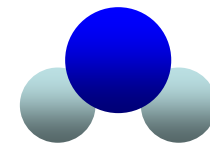
方向によって作用する力が
異なる性質

氷の結晶の分子模型



水素原子

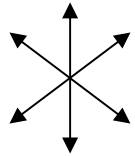
水分子 H_2O



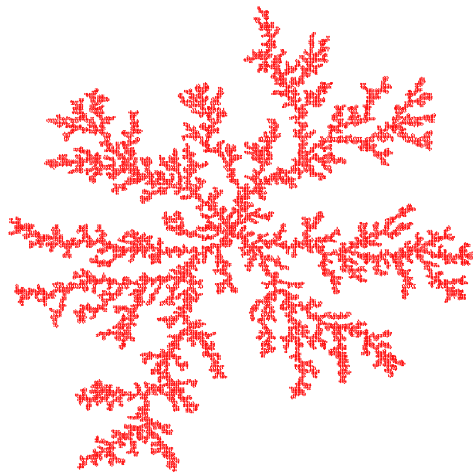
酸素原子

枝が成長しやすい6つの方向がある

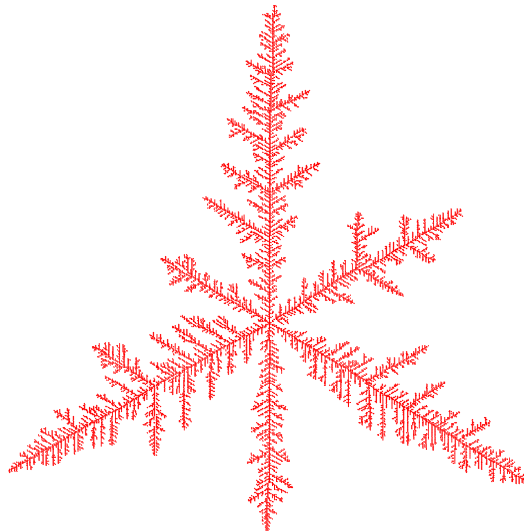
異方性を取り入れた成長 (DLA+異方性)



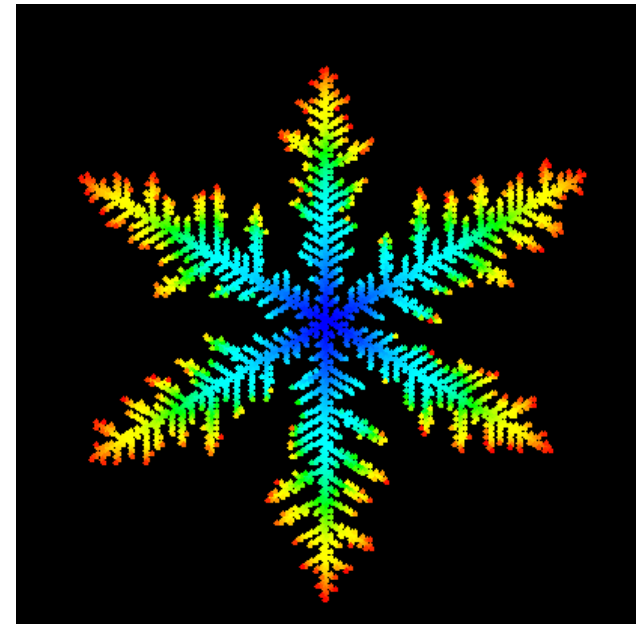
成長する方向



弱い異方性



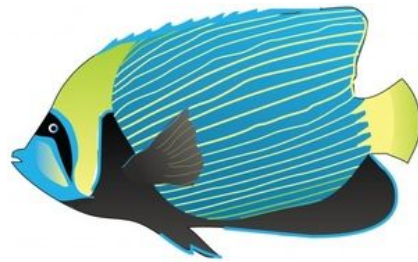
強い異方性



異方性+多数の粒子が同時に拡散

[後半] 反応拡散系

貝殻と熱帯魚の模様を巡る話



生物の模様: 空間的に分布した色素細胞(要素)の集団
要素間の相互作用によってパターンを形成

反応拡散系 パターンを再現する強力な手段

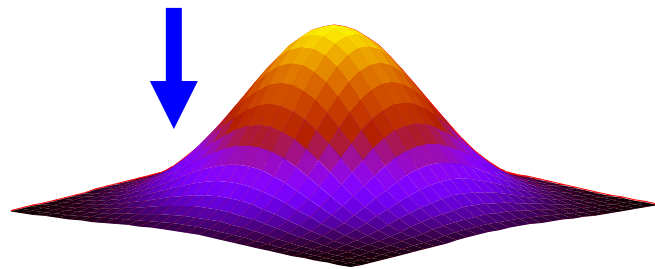
$$\left(\begin{array}{c} \text{個々の要素} \\ \text{の反応} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{拡散の} \\ \text{効果} \end{array} \right)$$

拡散の効果?

拡散とは？ その2

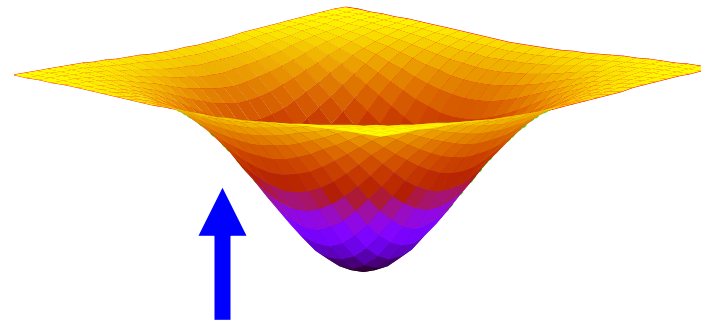
拡散する粒子の密度(物質の濃度)の変化を表す式 (拡散方程式)

$$(\text{密度の時間変化}) = (\text{定数}) \times (\text{分布の凹凸の鋭さ})$$



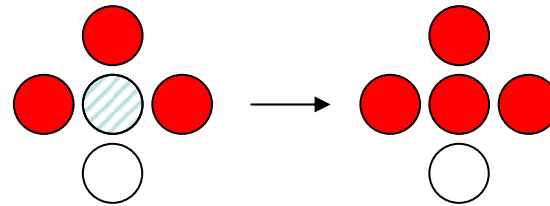
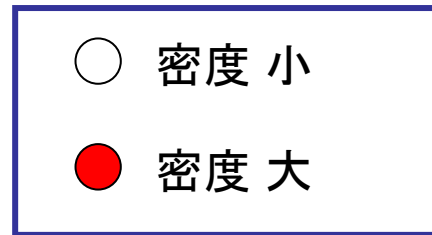
分布が上に凸(鋭さ負)

分布が下に凸(鋭さ正)

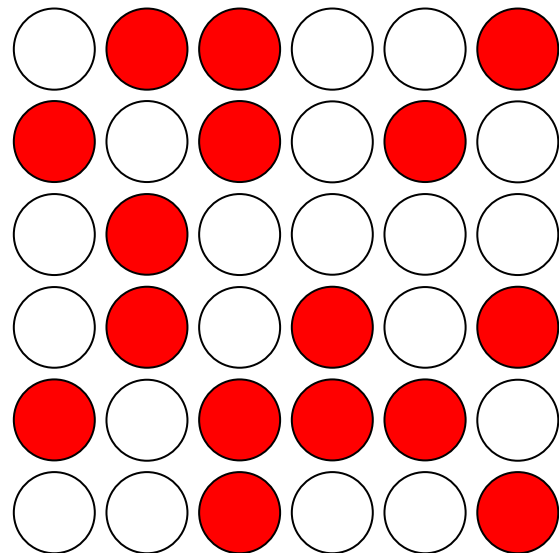


拡散は濃度や密度の分布を**一様にする効果**をもつ

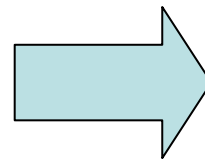
拡散的な相互作用



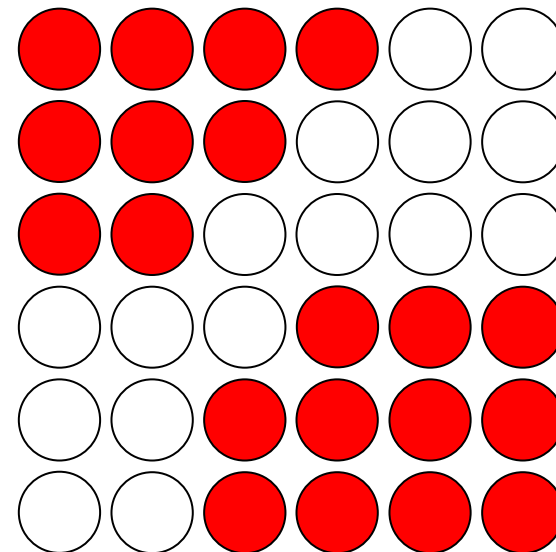
周りの色によって, 多数決で
自分の色を決める



赤と白がランダム



周りと同じにな
ろうとする作用



赤と白のグループを形成

III 貝殻の模様

巻貝の三角形パターン



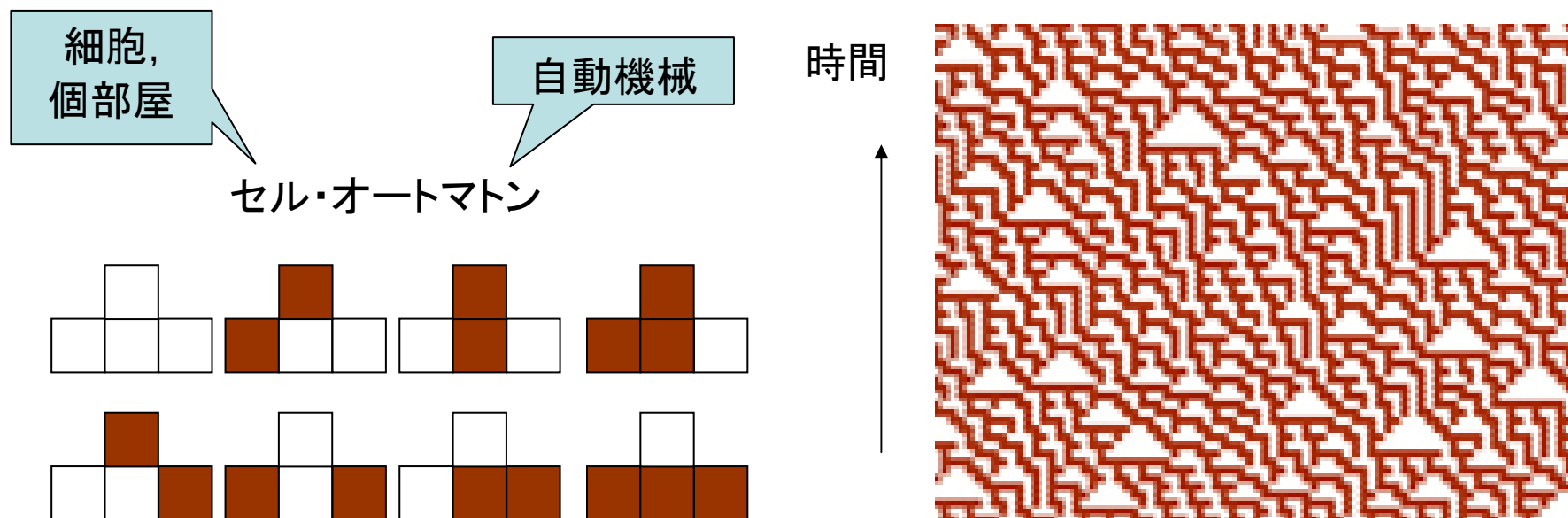
タガヤサンミナシ
巻貝(イモ貝)の1種



貝殻の成長面

三角形パターンを作る

その1

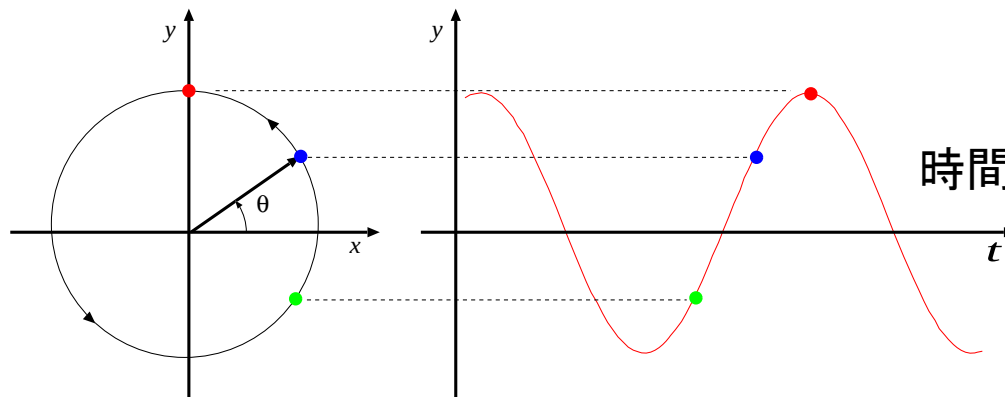


三つのマスの色に応じて、次の時間ステップのマス色を決める。

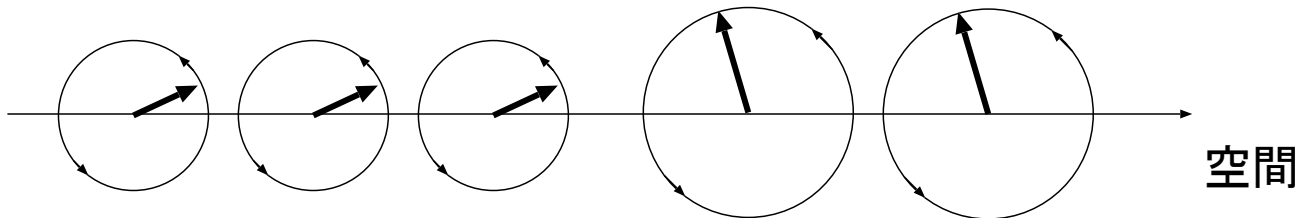
三角形パターンを作る その2

拡散的に結合した振動子の集団運動

回転運動 $\Leftrightarrow$ 振動



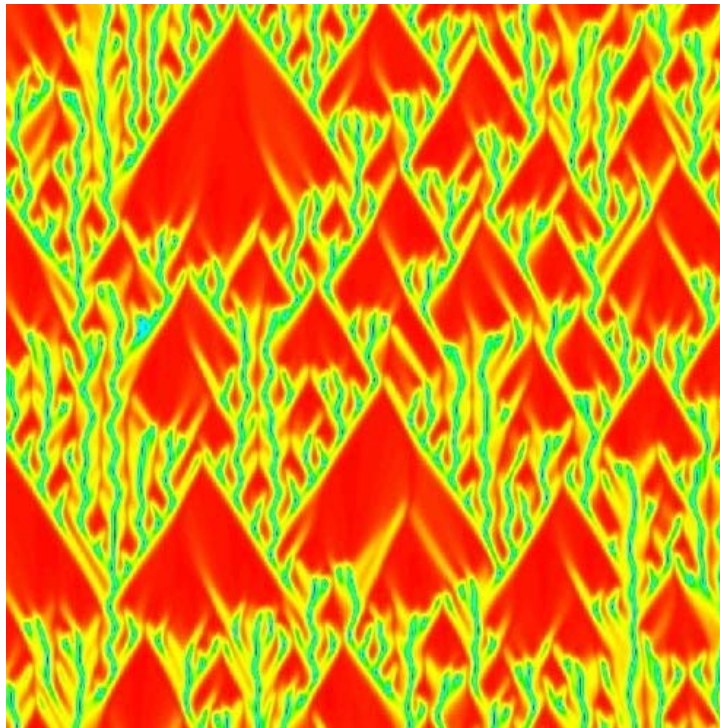
半径 $\Leftrightarrow$ 振幅
回転角 $\Leftrightarrow$ 位相



一様になろうとする効果によって、
部分的に振動がそろう領域ができる。

拡散的に結合した振動子を作るパターン

時間



1次元



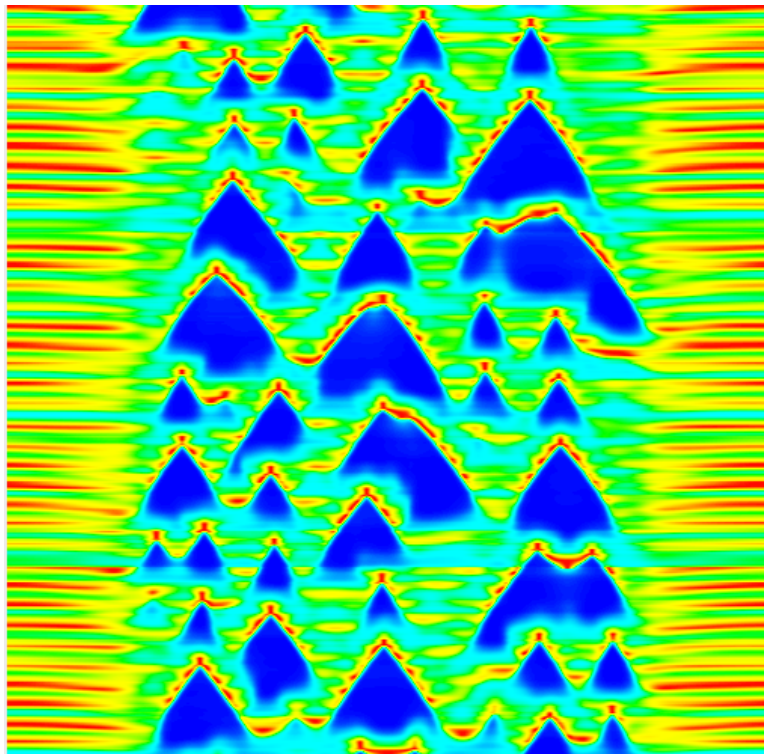
2次元

三角形パターンを作る その3

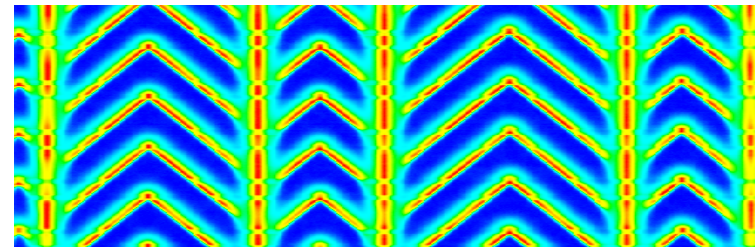


反応拡散系

時間



同じ式で係数を変えたと

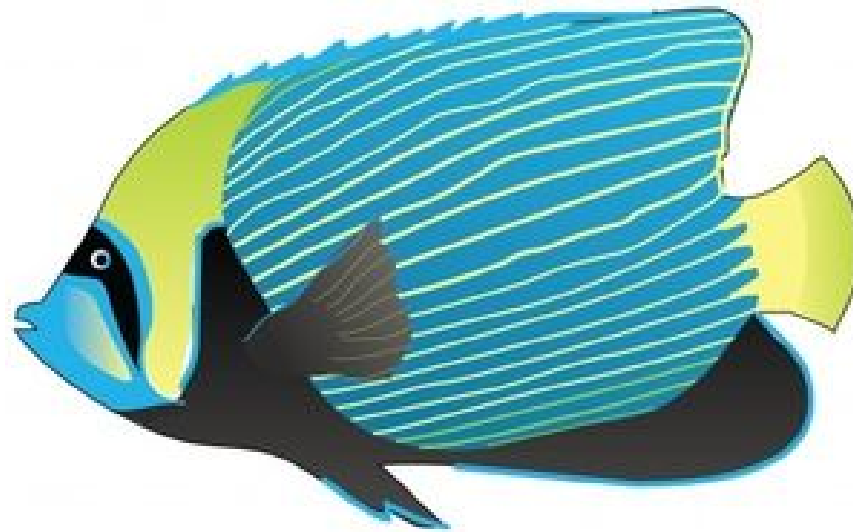


ブランデー貝

IV 熱帯魚の模様を巡る話

体表の模様は、体内からの物質の供給で形成、維持される非平衡系

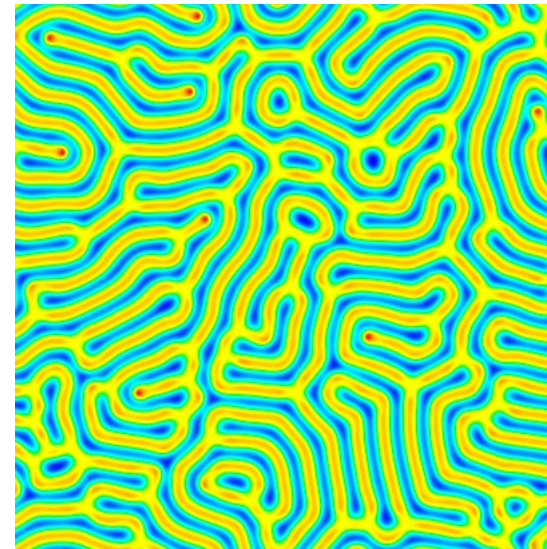
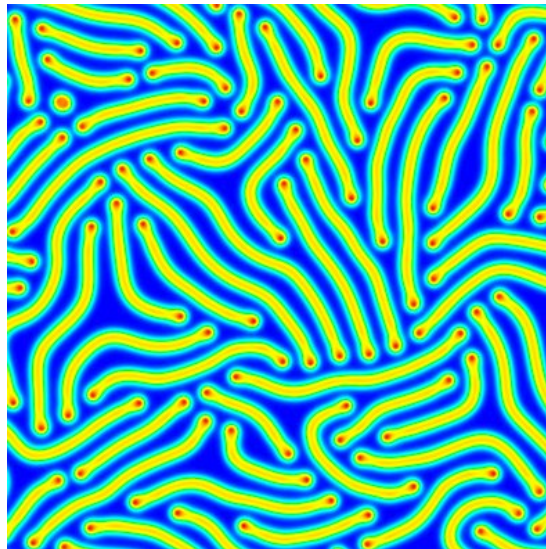
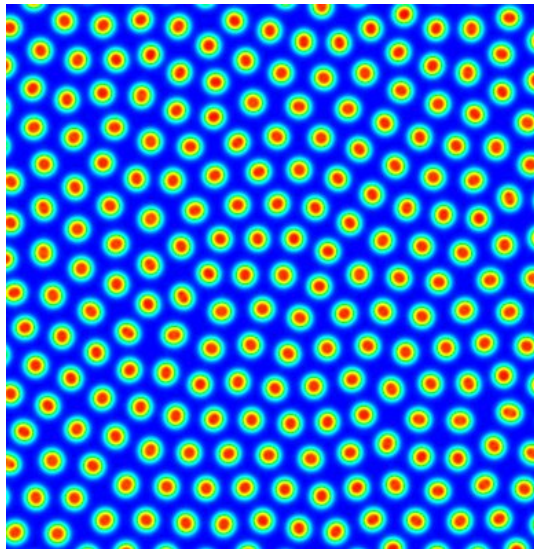
多様な模様はどのように形成される？



反応拡散系によるパターン

自発的に生じる空間パターン(グレイ - スcott モデル)

$$\left(\begin{array}{c} \text{AとBの濃度} \\ \text{の時間変化} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{AとBの} \\ \text{反応} \end{array} \right) + (\text{拡散効果})$$



係数を変えると斑点模様から縞模様へ

パターンができる典型的な仕組み

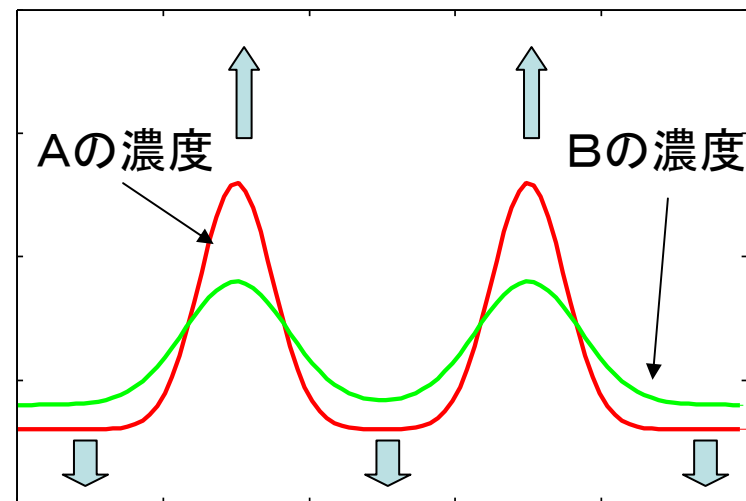
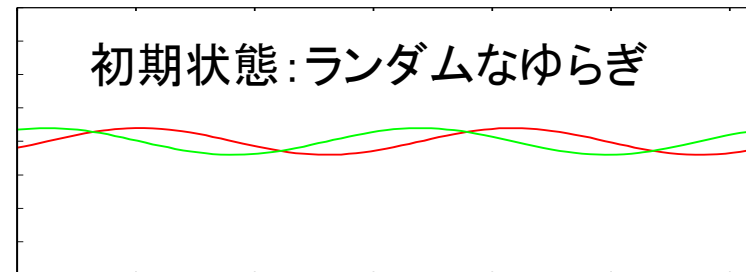
活性 - 抑制因子モデル (Activator-Inhibitor model)

物質 A : **活性因子**
反応を活性化 (自己増殖反応)

物質 B : **抑制因子**
Aの増加を抑える働き

A ゆっくり拡散
B 速く拡散

濃度



空間

チューリング・パターン

アラン・チューリング (Alan Mathison Turing)

イギリスの数学者, 計算機科学者

(1912年～1954年)

人口知能の父とも言われ, 計算機におけるアルゴリズムの概念を確立, チューリング・テスト, チューリング・マシンなどチューリングの名前を冠した重要な概念を提唱した。第二次世界大戦中, ドイツ海軍の暗号エニグマの解読に貢献したことも知られている。

1952年に数理物理学の形態形成に関する論文を発表, 反応拡散系で自発的に生じるパターン(チューリング・パターン)の存在を示した。

最後に

パターンを得るために使った数式

樹枝状パターン(拡散方程式)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \nabla^2 \phi$$

チューリング・パターン: 2次元反応拡散系
(グレイースコット モデル)

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = -AB^2 + a(1-A) + D_1 \nabla^2 A, \\ \frac{\partial B}{\partial t} = AB^2 + (a+b)B + D_2 \nabla^2 B, \end{cases}$$

振動子の拡散結合系
(複素ギンツブルグーランダウ方程式)

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \mu W - \lambda W |W|^2 + D \nabla^2 W$$

貝殻の模様(1次元反応拡散系)

$$\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial t} = sb \left(\frac{a^2}{1+a^2} + b_a \right) - r_a a + D_a \nabla^2 a \\ \frac{\partial b}{\partial t} = (1+s_b c)p(x) - sb \left(\frac{a^2}{1+a^2} + b_a \right) - r_b b + D_b \nabla^2 b \\ \frac{\partial c}{\partial t} = r_c \frac{a(c^2 + b_c)}{s_d + d} - r_c c + D_c \nabla^2 c \\ \frac{\partial d}{\partial t} = r_c a(c^2 + b_c) - r_d d + D_d \nabla^2 d \end{cases}$$

From “The algorithmic beauty of sea shells”
by Hans Meinhardt (Springer, 1995)