このファイルは「サイエンスカフェ in 静岡 第73話 連続体仮説の過去・現在・未来」の講演時に用いたスライドのダイジェストです。

ページ番号が付いているスライドは実際に講演時に用いたものです。ページ番号の付いていないスライドは質問が出たときに答えるためにあらかじめ用意しておいたものの一部です。

ダイジェスト版の中で読みやすくするために、掲載順番を変更しているスライドがあります。

数学以外には関心がないんだよ。 でもそれなりに魅力的な人物でもあるんだ。 住所を教えてくれないか。 今度、暇ができたら会いに行ってみよう。

--- 東野圭吾『容疑者×の献身』

サイエンスカフェ in 静岡 第73話 2013年2月21日

連続体仮説の過去・現在・未来
版岡 輝幸

なんでそんなにあっさり、あたしの証言より、

あっちの方が真実だって認めるの?

神原君がこれだけ大勢の人達の前で証言したから?

(中略)

だったら、あたしも公開の法廷でしゃべるんだった。

そんな単純なことで真実が決まるなら、

あたしもみんなの前に出れば良かった!

― 宮部みゆき『ソロモンの偽証 第三部』

科学と数学は違う

- 人の推論には次の3種類ある(パース(Charles Peirce)による).
- induction 【帰納】個々の具体的事実から,一般的な命題を導きだすこと.特殊から普遍を導きだすこと.

deduction は間違えのない推論だが,新しい結論を導かない. <u>induction と abdu</u>ction は新しいことを結論付けるが,必ずしも正しくない.

数学の推論は deduction しか出て来ない。だから、数学は間違えない。

最初はそんなこと、誰も信じていなかった。 少しも信じていなかった。 噂はいつだってそういうものだ。 — 宮部みゆき『ブレイブ・ストーリー』

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$
?

連続体仮説の過去

19世紀後半から20世紀初頭

高校の教科書ではこのように 説明される.

実数 ℝeal numbers <

有理数 Quotient 有限小数

整数 Zahlen 有限小数 循環小数

無理数(循環しない無限小数)

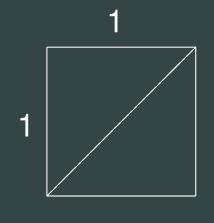
実数は数直線上の位置のことだと思える.

$$-2 -1 0^{\frac{1}{2}} 1 2$$
 ...

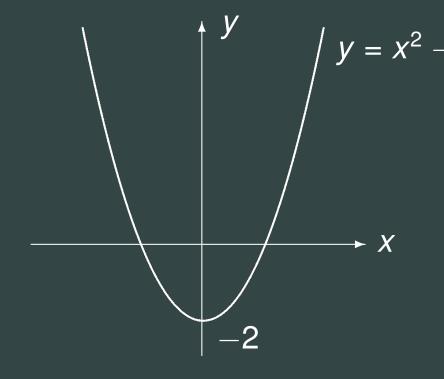
有理数は数直線上にびっしり詰まっているように思える. なぜなら, 2 つの異なる有理数 a < b の間に別の有理数, 例えば $\frac{a+b}{2}$, が存在するから.

よって,有理数は数直線を埋め尽くしているように思える. しかし,実は穴がある.例えば, 定理.2乗すると2になる有理数は存在しない.

でも,2乗すると2になる数って,いかにもありそう.



この正方形の対角線の長さの2乗は $1^2+1^2=2$ である.



この放物線とx軸は交わっているように見える.

証明. $\int k^2 = 2n^2$ を満たす正の整数のペア k と n が存在しない」ことを示せば良い($k^2 = 2n^2$ は $\left(\frac{k}{n}\right)^2 = 2$ と同じこと).

k と n を, $k^2 = 2n^2$ を満たす正の整数のペアで,そのうち n が最も小さいものだと仮定する.このとき, $k^2 = 2n^2$ だから,k は偶数で,さらに n も偶数である.よって, $\frac{k}{2}$ も $\frac{n}{2}$ も両方とも正の整数で, $k^2 = 2n^2$ より, $\left(\frac{k}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{n}{2}\right)^2$

が成り立つ. しかし, $\frac{n}{2} < n$ である. これは, n の最小性に矛盾する.

実際,人は2乗して2になる"本当の数値"を使わない、大抵は近似値で済んでしまう、しかし、実際に数学をやるときは「だいたい同じ」では間違いを犯す、正しい理論を構築し、物理学、化学などのあらゆる科学理論に貢献できる基盤を作るのが数学の大きな役割のひとつ。

定義 (デデキント (Richard Dedekind)) 実数とは,

次の性質を満たす有理数の集合 R のことである (これを有理数の切断、カットと呼ぶ).

- 1. どんな $a \in R$ に対しても、a より小さい有理数は全て R に属する.
- 2. R に属さない有理数が存在する.

例
$$\left\{x: x \text{ は } x < 0 \text{ また は } x^2 < 2 \text{ を満たす 有理数である}\right\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{Q}: x < 0 \text{ また は } x^2 < 2 \text{ を満たす}\right\} \qquad \text{ は } \sqrt{2} \text{ を表す 切断 である}.$$

例 各有理数 q に対して, $\left\{x\in\mathbb{Q}:x< q\right\}$ は有理数 q を表す切断である.

例 自然対数 $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)''=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ だから, このスライドは説明しません

$$\left\{x \in \mathbb{Q} :$$
ある自然数 n が存在して $x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ を満たす $\right\}$, $\left\{x \in \mathbb{Q} :$ ある自然数 n が存在して $x < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ を満たす $\right\}$

のどちらも e を表す切断である.

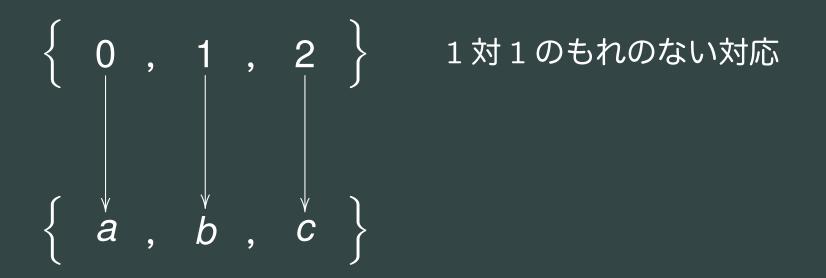
|例 円周率 π は, $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$ を満たすから,

$$\left\{x\in\mathbb{Q}:$$
無限個の自然数 n に対して $\frac{x}{4}<\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1}$ を満たす $\right\}$

はπを表す切断である.

実数の定義は他にもいくつかありますが、どれを採用しても同じです。

定義 (カントル, Georg Cantor). 2つの集合 $S \, E \, T$ に対して, $S \, E \, T \, が同数であるとは,<math>S \, E \, T \, O$ 間に $1 \, \text{対} \, 1 \, O$ もれのない対応(全単射)があるときを言う.集合 $S \, E \, T \, M$ 同数のとき, $S \, E \, T \, E$ もしくは $T \, E \, E \, E$



有限集合はこのように自然数を使って数え上げることができる. 自然数で数え上げることができない集合を無限集合と呼ぶ.

```
定理 (カントル). \mathbb{N} \approx \left\{ x : x = 2k \ となる \ k \in \mathbb{N} \ \text{が存在する} \right\}, \ \mathbb{N} \approx \mathbb{Z},
\mathbb{N} pprox \mathbb{N}^2 = \Big\{ (x,y) : x \in \mathbb{N} \ かつ \ y \in \mathbb{N} \Big\}, \ \mathbb{N} pprox \mathbb{Q} \ などが成り立つ.
\mathbb{N}pprox\left\{x:x=2k\ 	ext{となる}\ k\in\mathbb{N}\ 	ext{が存在する}
ight\}=(偶数全部の集合) の証明.
           0 1 2 3 4 ··· <u>k</u> ···
```

$$\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$$
 の証明. 0 1 2 3 4 5 6 \cdots 2 $k+1$ 2 $k+2$ \cdots 0 1 -1 2 -2 3 -3 \cdots $k+1$ -($k+1$) \cdots

$$\mathbb{N} pprox \mathbb{N}^2 = \left\{ (x,y) : x \in \mathbb{N} \ extstyle extstyle$$

 $k+1=2^{m_0^k}\cdot (2m_1^k+1)$ と素因数分解して, $k\to (m_0^k,m_1^k)$ と対応させると,こ れは1対1のもれのない対応である.

$$\eta(0) = \xi(0) = 0$$
, 各自然数 $m > 0$ に対して,

$$\xi(m) = \begin{cases} -\frac{m-1}{4} & m = 1 \pmod{4} \\ -\frac{m-2}{4} & m = 2 \pmod{4} \\ \frac{m-3}{4} & m = 3 \pmod{4} \end{cases} \qquad \eta(m) = \begin{cases} -\frac{m-1}{2} & m = 1 \pmod{2} \\ \frac{m-2}{2} & m = 2 \pmod{2} \\ \frac{m-4}{4} & m = 4 \pmod{4} \end{cases}$$

と定義し, p_k をk番目の素数とし,

と対応させると、これは1対1のもれのない対応である.

定理 (カントル). $\mathbb{R} \approx \left\{ X : X は \mathbb{N}$ の部分集合である $\right\} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ が成り立つ.

集合 A が集合 B の部分集合であるとは、どの A の元も B の元であるときを言い、 それを $A \subset B$ と書く.

Xが $\mathbb N$ の部分集合であるとは、結局、 $\mathbb N$ はいくつかの自然数の集合である」 $\mathbb N$ は自然数からなる集合」ということ、例えば、

$$\Big\{2,3,5,7\Big\}, \quad \Big\{k\in\mathbb{N}: k \ \mathrm{は奇数である}\Big\}, \quad \Big\{k\in\mathbb{N}: \varphi(k)\Big\}$$

など、ただし、すべての№の部分集合がこのように表記されるとは限らない。

- そもそも、切断としての実数は $\mathbb Q$ の部分集合だから、 $\mathbb R$ から $\mathcal P(\mathbb Q) \approx \mathcal P(\mathbb N)$ への 1 対 1 の対応がある.
- ullet $X\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$ に対して, $\sum_{n\in X}3^{-n}$ を割り当てる対応は, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ から \mathbb{R} への1対1の対応である.

定理 (カントル, 1873年12月7日). №と ℝは同数でない.

証明. \mathbb{N} と $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ($\approx \mathbb{R}$) が同数であると仮定する.

 $f: \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ を 1 対 1 のもれのない対応だとする.

 $X = \{k \in \mathbb{N} : k \notin f(k)$ を満たす $\}$ と定義する.

 $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ で、f はもれのない対応だから、X = f(m) となる $m \in \mathbb{N}$ が存在する. さて、 $m \in X$ であるか? それとも、 $m \notin X$ であるか?

もし $m \in X$ だったら、 $m \notin f(m) = X$ となり、矛盾する.

もし $m \notin X$ だったら、 $m \in f(m) = X$ となり、矛盾する.

よって、 \mathbb{N} と $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ は、つまり \mathbb{N} と \mathbb{R} は同数でない.

定義と定理 (カントル). 無限集合の階層を定義することができ、それを小さい順に並べることができる.

$$\aleph_0$$
 \aleph_1 \aleph_2 \aleph_3 \cdots \aleph

№ と同数の集合を可算無限集合と言う.

№ と同数でない無限集合を非可算(不可算)集合と言う.

定義 (カントル, 1878). 連続体仮説(\underline{C} ontinuum \underline{H} ypothesis, CH)とは「 $\mathbb{R} \approx \aleph_1$ が成り立つ」という言明である.

 $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$ であることと, 2^{\aleph_0} を $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ と同数である階層だと定義することから,連続体仮説を

とも表す.

その存在に気付かぬふりをさせてはならない。 自分たちのすぐそばにあることをいつも意識させ、 そのことの意味を考えさせねばならない。 そして彼等に道を選ばせねばならない。 ― 東野圭吾『天空の蜂』

 $2^{\aleph_0} = \aleph_2$?

20 世紀

連続体仮説の現在

述語論理における形式体系はそれぞれ、固有の記号を持っている.

ペアノ算術(PA)なら、 $0, 1, <, +, \cdot,$ (累乗の記号)と論理記号 $\neg, \land, \lor, \rightarrow,$ \leftrightarrow $(,), \forall, \exists, =, と可算無限個の変数記号<math>v_0, v_1, v_2, \cdots$.

公理的集合論(ZFC)なら、 \in と論理記号 \neg , \land , \lor , \rightarrow , \longleftrightarrow , $\left(,\right)$, \forall , \exists , =, と可算無限個の変数記号 v_0 , v_1 , v_2 , \cdots .

各形式体系での言明は、論理式と呼ばれる、文法的に正しい有限の記号列で表現される、例えば、次はいずれも PAの論理式である.

$$\forall v_0 \Big(\exists v_1 \Big(1+1+1=v_0 \cdot v_1 \Big) \rightarrow \Big(v_0=1 \lor v_0=1+1+1 \Big) \Big)$$

|述語論理の構文論(syntax) 次の条件を満たす有限個の論理式からなる列

 $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$ を PAから φ_n への形式的証明と呼ぶ(以下, 証明 $^{(R)}$ と書く): 各 $i = 0, 1, \dots, n$ に対して、次の 2 つのどちらかが成り立つ.

- φ_i は論理的公理もしくは PAの公理のいずれかである.
- *i* よりも小さい番号 *j* と *k* が存在して、 φ_i は $\varphi_k \to \varphi_i$ という記号列である.

$$\varphi_0 \quad \varphi_1 \quad \cdots \quad \varphi_j \quad \cdots \quad \varphi_k \quad \cdots \quad \varphi_i \quad \cdots \quad \text{(Modas Ponens!)}$$

例 1.
$$(v_0 = v_1 \rightarrow v_0 + 1 = v_1 + 1)$$

公理

2.
$$(v_0 = v_1 \rightarrow v_0 + 1 = v_1 + 1) \rightarrow \forall v_0 (v_0 = v_1 \rightarrow v_0 + 1 = v_1 + 1)$$
 公理

公理

3.
$$\forall v_0 \Big(v_0 = v_1 \rightarrow v_0 + 1 = v_1 + 1 \Big) \rightarrow \forall v_0 \forall v_1 \Big(v_0 = v_1 \rightarrow v_0 + 1 = v_1 + 1 \Big)$$
 公理

4.
$$\forall v_0 (v_0 = v_1 \rightarrow v_0 + 1 = v_1 + 1)$$

1と2 の MP

5.
$$\forall v_0 \forall v_1 \left(v_0 = v_1 \rightarrow v_0 + 1 = v_1 + 1 \right)$$

3 2 4 の MP 述語論理の意味論(sementics) 空でない集合と, PA固有の記号にその集合上の解釈を与えたものの組を PAの構造と呼ぶ. PA固有の公理すべてを満たす(成立させる) PAの構造を PAのモデルと呼ぶ.

<u>例</u> 集合 $\{0,1,2\}$ 上に、次の解釈を与える:0=0,1=1,

この構造は、例えば、
$$\begin{pmatrix} 1+1 \end{pmatrix} + 2 = 2 \cdot 2$$
 を満たし、
$$\neg \begin{pmatrix} 1+1+1 = 0 \end{pmatrix}$$
 を満たさない.

この構造は PA のモデルではない.

定理(ゲーデル(Kurt Gödel),1929,完全性定理)。 どんなZFCの論理式 φ に対しても,「ZFCから φ への証明 $^{(R)}$ が存在する」ことと と「どんなZFCのモデルも φ を満たす」ことは同値である。つまり,

 $\mathsf{ZFC} \vdash \varphi$ と $\mathsf{ZFC} \models \varphi$ が同値である.

/完全性定理はどの述語論理における形式体系にも当てはまる定理である. 実は, ⇒ は<mark>健全性定理</mark>と言って, 定義から自然に証明できる. この定 \理の本質的な部分は ← である.

- つまり、Tが述語論理の形式体系、 φ がTの論理式であるとき、
- Tから φ への証明 $^{(R)}$ が存在することを示したければ、 実際にTから φ への証明 $^{(R)}$ をひとつ与えれば良い.
- T から φ への証明 $^{(\mathbb{R})}$ が存在しないことを示したければ、 φ を満たさない T のモデルをひとつ与えれば良い.

定理 (ゲーデル, 1940). ZFC から ¬ CH への証明 ^(形) は存在しない.

/<mark>構成可能集合</mark>という概念を発明し,ZFC において定義可能で「CH を満たさ) ない ZFC のモデルのようなものを構成し,この定理の証明を得た.

定理 (コーエン (Paul Cohen), 1963). ZFC から CH への証明 ^(形) は存在しない.

/<mark>強制法という手法を開発し,CH を満たさない ZFC の部分的なモデルの構成〉</mark> 法を与え,この定理の証明を得た.

、この業績により,コーエンは 1966 年にフィールズ賞を受賞した.

定義。 Φ を強制できるとは「どんな有限個の ZFC の公理 $\varphi_0, \dots, \varphi_m$ に対しても,有限個の ZFC の公理 ψ_0, \dots, ψ_n が存在して,

$$ZFC \vdash \forall M: \left\{\psi_0, \cdots, \psi_n\right\}$$
のモデル $\exists M[G]: \left\{\varphi_0, \cdots, \varphi_m, \Phi\right\}$ を満たす M の拡大モデルが成り立つ」ときを言う.

これが分かるとき、「 $ZFC+\Phi$ が矛盾するならば ZFC が矛盾する」ことが示される.

つまり、「ZFCが無矛盾であるならば ZFC +Φ が無矛盾である」ことが示される.

定義。 Φ を強制できるとは「どんな有限個の ZFC の公理 φ_0 , …, φ_m に対しても,有限個の ZFC の公理 ψ_0 , …, ψ_n が存在して,

ZFC
$$\vdash \forall M: \left\{ \psi_0, \cdots, \psi_n \right\}$$
 のモデル
$$\exists M[G]: \left\{ \varphi_0, \cdots, \varphi_m, \Phi \right\}$$
を満たす M の拡大モデル

が成り立つ」ときを言う.

ZFC + ゆが矛盾すると仮定する.このとき,有限個の ZFC の公理 φ_0 , …, φ_m が存在して, $\{\varphi_0, \dots, \varphi_m, \Phi\} \vdash \chi \land (\neg \chi)$ が成り立つ.このとき,この $\{\varphi_0, \dots, \varphi_m\}$ に対して,上のような有限個の ZFC の公理 ψ_0 , …, ψ_n が存在する.このとき,

ZFC
$$\vdash$$
 $\{\psi_0, \cdots, \psi_n\}$ のモデル M が存在する.

Φを強制できるので,

 $\mathsf{ZFC} \vdash \{\varphi_0, \cdots, \varphi_m, \Phi\}$ を満たす M の拡大モデル $\mathsf{M}[\mathsf{G}]$ が存在する.

よって、 $\mathsf{ZFC} \vdash \mathsf{''}M[G] \models \chi \land (\neg \chi)\mathsf{''}$ が成り立つ、つまり ZFC が矛盾する.

ゲーデルは「証明も反証もできない多数の数学的言明の真偽,特に2[№] の値,をZFC+(強い無限公理)から決定する」というゲーデルのプログラムを提唱した.

強い無限公理は、今は巨大基数公理と呼ばれる、

Con(ZFC) を導く ZFC で表現可能な言明と考えられている.

バウムガルトナー(James Baumgartner)により導入された代表的な強制公理である PFA を用いて、

定理 (トドロシェビッチ (Stevo Todorčević), 1980's). PFA を仮定すると, $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ が成り立つ.

(PFA は強い無限公理のひとつと考えられるので)

連続体仮説についてのゲーデルのプログラムが完成した!

「学者っていろいろと大変だね」 恭平はマスターキーを渡した。 「楽をしていては真理を掴めない」 湯川は鍵を外し、ドアを開けた。 — 東野圭吾『真夏の方程式』

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$
?

$$2^{\aleph_0} = \aleph_2$$
?

$$2^{\aleph_0} = ??$$

21世紀とその先

連続体仮説の未来

- その① 復習 $oldsymbol{1}$ 下を述語論理の形式体系,arphi をTの論理式とする $oldsymbol{1}$
- Tから φへの証明 (所) が存在することを T ⊢ φ と書いた. (構文論的観点)
- どんなTのモデルも φ を満たすことを $T \models \varphi$ と書いた. (意味論的観点)

完全性定理は「 $T \vdash \varphi$ と $T \models \varphi$ が同値である」という定理であった.

定義. 「どんなTの論理式 φ に対しても, $\mathsf{T} \vdash \varphi$ または $\mathsf{T} \vdash \neg \varphi$ のいずれかが成り立つ」とき, T は完全であると言う.

不完全性定理はこの意味で「PAや ZFCは完全ではない」と言っている.

欲しいのは(なるべく)完全な数学の形式体系である. 導ける言明を増やすには「証明(形)の種類を増やす」もしくは「モデルの種類を減らす」新しい論理を定義すれば良い.

- ただ, 証明^(形)の種類を増やし過ぎれば, 矛盾してしまう.
 - そもそも、そんなことどうすれば良いのかさっぱり分からない。

例えば、PA においては標準モデル $\mathbb N$ があることから、「PA が φ を導く」ことを新たに「 $\mathbb N$ は φ を満たす」ことと定義すると、この算術の論理体系は完全になる(これを true arithmetic と呼ぶ).

数学の公理体系とも言われる ZFC は算術のようにはいきそうにない、なぜなら、強制法による研究などが発展し、標準的な ZFC のモデルが存在しそうにないような気がするから、しかし、

定義と定理 (Woodin, 2000). $[\Omega$ -論理] ZFC の論理式 φ に対して,

- 「どんな rank initial segment の強制拡大モデルも φ を満たす」とき、 $\models_{\Omega} \varphi$ と定義する.
- 「universally Baire (という性質を持つ) 実数の集合が φ に対してある条件を持つ」とき, $\vdash_\Omega \varphi$ と定義する.

そして、もし「どんな ZFC の論理式 φ に対しても、 $\models_{\Omega} \varphi$ と $\vdash_{\Omega} \varphi$ が同値になる」ならば、 $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ が成り立つ.



HIGHER ANALOGUE

その② 定理 (カントル, 1873年12月7日). №と ℝは同数でない.

別証明. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ とする. f が もれのある対応である ことを示す.

$$\mathbb{P} = \left\{ (a,b) : a,b \in \mathbb{Q}, a < b \right\}$$
,端点が有理数の開区間全体の集合, $(a,b) \leq_{\mathbb{P}} (a',b') \iff (a,b) \subseteq (a',b')$

各 $\alpha \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\mathcal{D}_{\alpha} = \left\{ (a,b) : (a,b) \in \mathbb{P} \ \text{であり}, f(\alpha) \notin [a,b] \,$$
を満たす $\right\}$ と定義する.

0, 1, 2,…, α ,… と順番に、次を満たす $(a_{\alpha},b_{\alpha})\in\mathbb{P}$ を順にとる.

- ullet $(a_0,b_0)\supseteq (a_1,b_1)\supseteq (a_2,b_2)\supseteq\cdots\supseteq (a_{lpha},b_{lpha})\supseteq (a_{lpha+1},b_{lpha+1})\supseteq\cdots$,
- $(a_{\alpha}, b_{\alpha}) \in D_{\alpha}$ を満たす,つまり $f(\alpha) \not\in [a_{\alpha}, b_{\alpha}]$ を満たす.

このとき, $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{N}}[a_{\alpha},b_{\alpha}]
eq\emptyset$ であり,どの $\beta\in\mathbb{N}$ に対しても, $f(eta)
ot\in\mathbb{N}$ $a\in\mathbb{N}$

成り立つ. よって、 $\bigcap [a_{\alpha},b_{\alpha}]$ の元はfのどこにも対応されていない.

Ш

定義.

にあるほど多くの情報を持つ!).

 \mathbb{P} のdense subset D_{α} は,要求する条件を満た す情報の集まり.

ℙ Ogeneric filter Gは、情報を集約するもの。

を満たす 半順序 ℙと

し ω_1 stationary preserving 任意の \mathbb{P} の dense subsets $\left\{D_{\alpha}: \alpha < \aleph_1\right\}$ に対して,

ℙの generic filter G が存在して,

どの $\alpha < \aleph_1$ に対しても, $G \cap D_{\alpha} \neq \emptyset$ である」 という言明である.

この \aleph_1 をそのまま \aleph_2 に置き換えると、MA 以外は成り立たない。そして、MA は2%の値を決定しない公理であることが知られている.

上の \aleph_1 を \aleph_2 に換えてもなお無矛盾で、 2^{\aleph_0} の値を決定するような、可能な限り

強い強制公理を見つけたい.そして,それは $2^{\aleph_0} = \aleph_3$ を導くか??

依岡は、公理的集合論の分野で大変著名なブレンドル(Jörg Brendle)先生 (神戸大学)の指導を受けました。

ブレンドル先生の専門は、 ℝ上の組合せ論と強制法理論です.

依岡の専門は、ℵ₁上の組合せ論と強制法理論です.

当日の講演では、自分の研究に一切触れませんでした.

「講演者は実際にどういう研究をしているのか」との質問に対してお見せする のに用意していたスライドです.

「ここ、いいよ」 叶夢は言った。 「そこにてんしがとまってる」 — 雫井脩介『つばさものがたり』

 $\mathcal{K}_2 \to MA_{\aleph_1}$?

おまけ

静岡で行った研究の一例

 MA_{\aleph_1} から \mathcal{K}_2 :「すべての ccc な半順序は property K(という性質)を持つ」 ことが導かれる.

トドロシェビッチは,これをもっと精密に研究し, MA_{\aleph_1} と $\mathcal{K}_{<\omega}$:「すべての ccc な半順序は precaliber \aleph_1 を持つ」ことが同値であることを証明した.

$$\mathsf{MA}_{leph_1} \leftrightarrow \mathcal{K}_{<\omega}
ightarrow \mathcal{K}_2$$

さて、では「 $\mathcal{K}_2 \to \mathsf{MA}_{\aleph_1}$ は成り立つか?」という問題が考えられるが、これは未だに解決されていない。

定理 (Y.). ccc より強い性質 rec を定義し、 MA_{\aleph_1} や \mathcal{K}_2 などの言明に現れる ccc を rec に制限した公理について研究した。例えば、次を証明した.

- MA_{\aleph_1} (rec) は成り立つが, \mathcal{K}_2 は成り立たないことが ZFC と無矛盾である.
- $\mathcal{K}_{<\omega}$ (rec) は成り立つが、 MA_{\aleph_1} (rec) は成り立たないことが ZFC と無矛盾である.

定理 (Y.). ccc より強い性質 rec を定義し、 MA_{\aleph_1} や \mathcal{K}_2 などの言明に現れる ccc を rec に制限した公理について研究した。例えば、次を証明した.

- MA_{\aleph_1} (rec) は成り立つが、 \mathcal{K}_2 は成り立たないことが ZFC と無矛盾である.
- $\mathcal{K}_{<\omega}$ (rec) は成り立つが, MA_{\aleph_1} (rec) は成り立たないことが ZFC と無矛盾である.

