

次元って何？

- 数学者はどのように次元を決めるか -

小山 晃

静岡大学理学部数学科

2011 年 3 月 24 日

生物の歴史 vs 数学（幾何学）の歴史

地球上の生命の歴史

- 古生代（三葉虫の時代）
- 中生代（恐竜の時代）
- 新生代（哺乳動物の時代）

数学の歴史

- **数学の古生代**：ピタゴラス, アルキメデス, 祖沖之など.
整数と多角形や放物線のような簡単な図形についてはよく知っていたが, **数の位取り記数法**は知らなかった.
- **数学の中生代**：17 世紀に最初の恐竜ルネ・デカルトが平面に**座標系**を導入し, 簡単な曲線を方程式に書き下し, 関数のグラフを解析する方法を導入した.
- **数学の新生代**：19 世紀になり, 最初の哺乳動物ゲオルク・リーマンが中生代の研究を「**多様体**」と呼ばれる「**曲がった空間**」の研究に適用したことから始まる.

古生代の「次元」

ユークリッド幾何学

幾何学体系の一つであり、古代エジプトのギリシャ系哲学者ユークリッド（紀元前 365 年? – 紀元前 275 年?）の著書「原論」(The Elements) に由来する。

「原論」より

- **点**とは、部分をもたないものである。
- **線**とは、幅のない長さである。
- **直線**とは、その上の点に関して一様に横たわっている線である。
- **面**とは、長さと幅のみをもつものである。
- **立体**とは、長さ、幅と高さをもつものである。

アリストテレス（紀元前 384 年? – 紀元前 322 年?）「天体論」より
3 次元は完全であり、それを超える次元は存在しない

中生代の「次元」

ルネ・デカルト（1596年－1650年）

「次元」とは「1点の位置を決めるために必要な数値の個数」と定義できると考え、「座標」の概念を確立した。

パップスの問題

3つの直線 a, b, c と3つの角 α, β, γ が与えられているとする。
任意に与えられた点 C に対し、点 B, D, F を直線 a, b, c 上に、
 CB, CD, CF と a, b, c の角が α, β, γ をなすようにとる。
このとき、

$$CB \cdot CD = (CF)^2 \cdots \cdots (+)$$

をみたす点 C の軌跡を求めよ。



ルネ・デカルト (1596–1650)

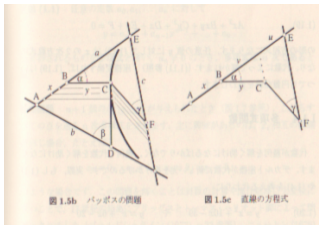


図 1.5b パップスの問題

図 1.5c 直線方程式

新生代の「次元」 — 私たちの住む世界は3次元 —

アンリ・ポアンカレ（1854年–1912年）の「逆転の発想」

- 端が0次元（点）になるものを1次元（線）とよぶ.
- 端が1次元になるものを2次元（面）とよぶ.
- 端が2次元になるものを3次元（立体）とよぶ.
- 端が3次元になるものを4次元（超立体）とよぶ.

ポアンカレの考え方

ポアンカレの定義の方法は、低い次元から高い次元へ上っていくものである。この方法であれば、何次元でも好きなだけ多くの次元を定義し、幾何学の中で扱うことができる。

多くの次元を扱う幾何学は大きく発展した。今日では「無限の次元」を扱う幾何学も存在する。

地球のかたち - その1 -

古来、「地球の形は丸い」という説の根拠の一つとして、「月食で月に映る地球の形は円形である」がある。

質問

3次元の立体に光を当てると、2次元の面の上に影ができる。この影のかたちは、もとの立体の形で決まる。

それでは影のかたちでもとの立体のかたちを決定できるか？

練習問題

- (1) 立方体の影が正方形, 長方形, 六角形になる光源の位置を探せ。
- (2) 影が円になる異なる立体を3つ探せ。
- (3) 3方向への影がそれぞれ円, 正方形, 三角形になる立体を探せ。

プラトン (紀元前 427 – –347) 「国家」より

私たちが見ている世界は“影”かもしれない。

だから経験したことだけが真実と考える人間になってはならない。

定義

K, L を互いに交わらない位相空間 X の閉部分集合とする. (閉) 部分集合 $S \subset X$ が K と L を**分離する**とは,

$$X \setminus S = U \cup V, \quad U \supset K, \quad V \supset L$$

をみたす開集合 U, V が存在することをいう.
言い換えると, S が X をそれぞれ K, L を含む開集合へ分けることをいう.

次元の定義 – ポアンカレのアイディアの定式化 –

定義

位相空間 X に対して、次元を次のように定義していく.

- (1) $X = \emptyset$ ならば, $\text{ind } X = -1$.
- (2) $n \geq 1$ について, $\text{ind } X \leq n - 1$ が定義できているとする.
任意の点 $x \in X$ と x を含まない任意の閉集合 $K \subset X$ が,
 $\text{ind } S \leq n - 1$ である閉集合 $S \subset X$ で分離できるとき,
 $\text{ind } X \leq n$ であると定義する.

さらに次のように定義していく.

$$\text{ind } X = n \iff \text{ind } X \leq n \text{ であるが } \text{ind } X \not\leq n - 1.$$

$$\text{ind } X = \infty \iff \text{すべての } n \geq 0 \text{ について, } \text{ind } X \not\leq n$$

上のよう定義する次元を「**小さな帰納的次元**」とよぶ.

このほかに代表的な位相次元として, 「**大きな帰納的次元** $\text{Ind } X$ 」,
「**被覆次元** $\dim X$ 」という次元の定義方法があるがここでは触れない.

ポアンカレはこのようにして位相空間に対して次元の概念を定義したが、それはデカルトの座標系の概念とは全く異なったものであった。

大切な課題

$\text{ind } \mathbb{R}^n = n$?

デカルトの定義だけで次元を考えると、

$\mathbb{R}^n$ 内の図形は全て n 次元？

のようなことになってしまうかもしれない. それでは私たちが2次元球面とよんでいる

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

は3次元？

0次元

定理

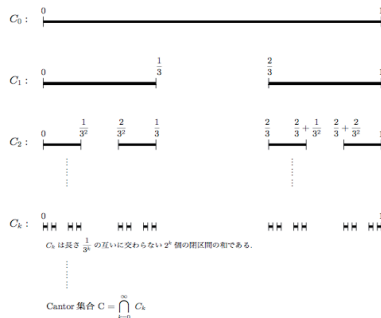
(局所) コンパクト距離空間 X について, $\text{ind } X = 0$ である必要十分条件は, 任意の異なる 2 点 $x, y \in X$ が空集合で分離できることである.

0次元空間の例

- (1) $\mathbb{R}^2$ 中の有限個の点のからなる部分空間 X .
- (2) 有理数全体からなる部分空間 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- (3) Cantor 集合 C .
- (3) Harnack 集合 H .

Cantor 集合は 0 次元？

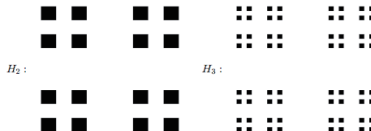
Cantor3進集合



Harnack 集合は 0 次元？

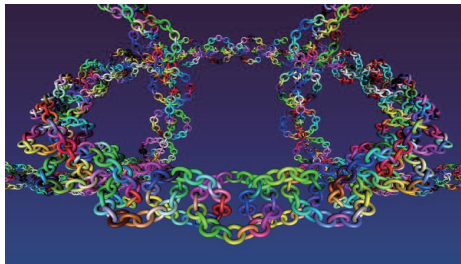
Harnack 集合

その構成

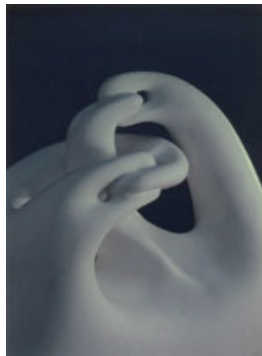


$$\text{Harnack 集合 } H = \bigcap_{k=0}^{\infty} H_k$$

Antonie Necklace は 0 次元？



Antoine Necklace



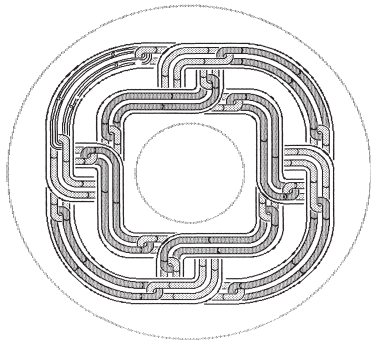
Alexander Horned Sphere

Science in Culture

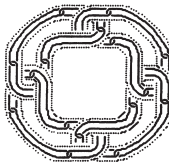
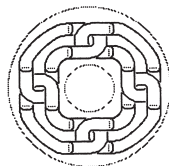
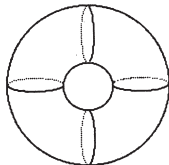
Antonie Necklace は 0 次元？



Fox-Artin wild arc



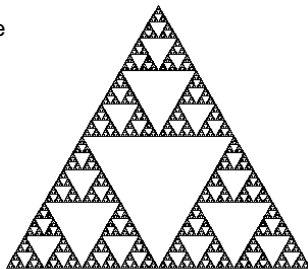
Antoine Necklace



...

Sierpinski Gasket は 1 次元？

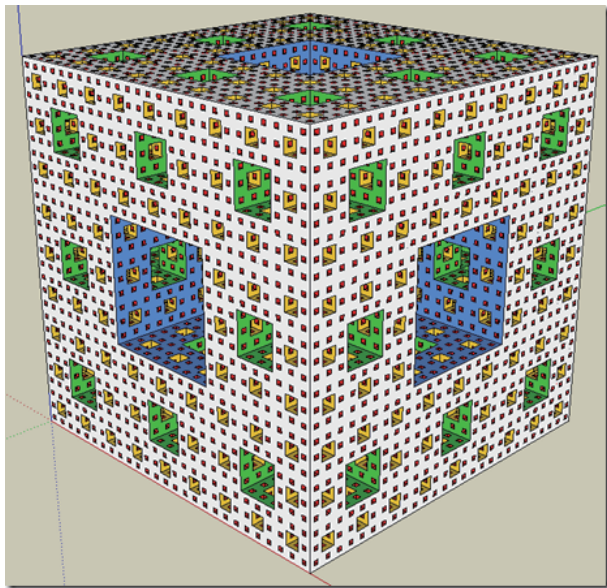
Sierpinski Gaske



その構成



Menger Curve は 1 次元？



Alexander's Horned Sphere

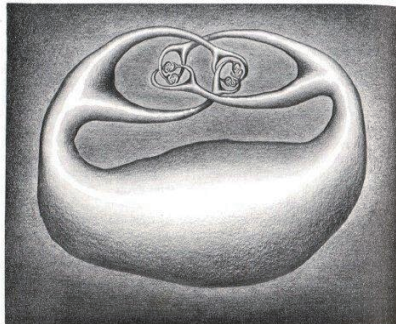
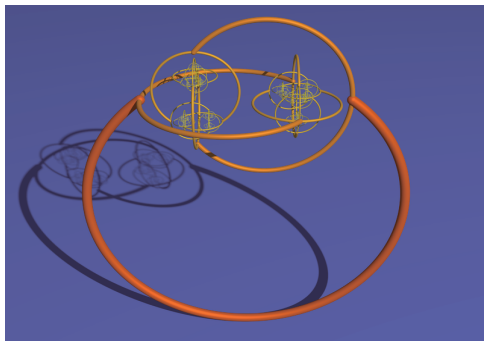
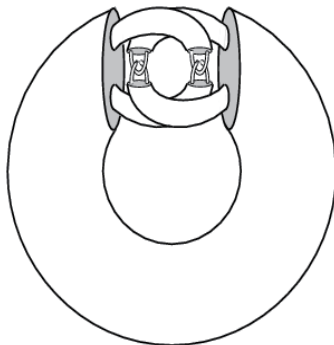
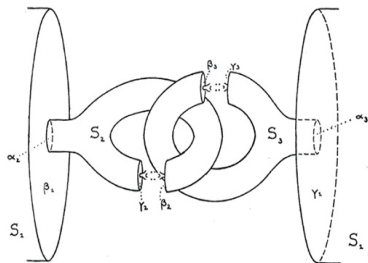


FIG. 4-11. The Alexander horned sphere.

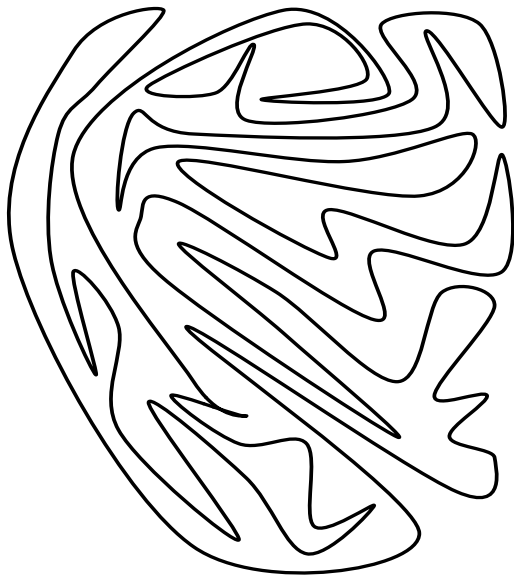
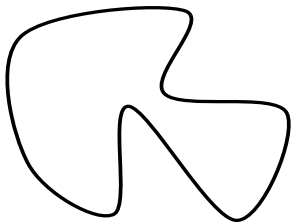
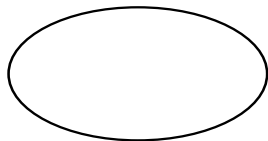
Alexander's Horned Sphere



Alexander's Horned Sphere

ジョルダンの閉曲線定理

ジョルダンの曲線定理



質問

Möius の帯は 3 ページのノートの中の図形と同相か？

メビウスの帯と3ページのノート(1)

