数　　学　　科

数学に関心を持つ皆さんへ

数学は、新しい概念や理論を構築することで、常に発展してきました．数学の研究・学習には、大胆で自由な発想とともに論理的に厳密な思考が要求されます。このような理由から、数学は難しいと思われがちです。確かに研究・学習には、忍耐が要求され、時には挫折感を味わうこともあります。しかし、こうした困難を経て、豊かな素晴らしい数学の世界を幾度も目撃できます。皆さんも、このような数学の魅力に遭遇され、数学を楽しんで下さい。なにげない数学や図形の中からも、数学の美しさに出会うチャンスが訪れるかもしれませんよ。

このような数学の研究・学習を、皆さんも行なってみませんか？理学部数学科のホームページを開いて見ると、詳しいことが色々分かります。ホームページのアドレスは、

https://wwp.shizuoka.ac.jp/sci-math/

です。私たち数学科スタッフは、数学を一緒に行い、語り合える皆さんを待ち望んでおります！

数学科の教育目標とカリキュラムの紹介

数学科では、次の能力を持つ人材の育成を教育目標に掲げています：

・数学に常に新しい視野を持って従事できる教育者（数学（中学・高等学校一種）の教員免許状が取得可能)。
・数学や数学的思考を用いて、現代産業技術に貢献できる専門的技術研究者。
・現代数学に果敢に挑戦し、新たな数学の創造に貢献できる研究者。

どの方面に将来進んでも、要求される数学を着実に身につけていけるように、カリキュラムが用意されています。数学科の授業科目について、簡単に紹介しましょう：

（1）**３年次までの数学の必修科目：**数学の伝統的分野である解析学、代数学、幾何学や数理論理学の基礎的内容を学習します。「位相、複素関数、群、環、多様体、関数解析、測度、古典論理」等の内容の科目で扱います。また、計算機演習も用意され、Ｃ言語等によるプログラム作成、プログラム理論の学習を通して、コンピューター操作に慣れ、計算機科学に接することができます。これらは現代数学への橋渡し的な科目で、カリキュラムの重要な部分です。数学科ならではの数学に最初に接する機会といえます。

（2）**３・４年次の数学の選択科目：**各人の興味に応じて学習を深めることができる科目が用意されています。これらは（１）の続論的な科目と、確率論、統計学、情報科学、数理科学等の応用的・学際的側面の内容を持つ科目からなります。

（3）**４年次の数学の必修科目：**各人が興味を持つ数学の一つの分野を、セミナー形式で教員の個人指導のもとで深く掘り下げて学びます。これにより、数学研究の一端に触れると同時に、学部での数学学習の仕上げを行います。

（4）**数学以外の科目：**必修科目に、外国語、現代教養科目が用意されています。また選択科目としては、理系基礎科目、情報処理、健康体育等が用意されています。さらに自由科目としては、教職科目、理学部の他学科や他学部の専門科目等が用意されています。

教員からのメッセージ

今、ここを読んでいる君。君は、「数学」が好きですか？嫌いですか？いずれにしても、「数学」がちょっとは気になって、このメッセージを読んでいますよね。好きにしても、嫌いにしても、君

は「数学」のイメージを君なりに持っていますよね。君の「数学」のイメージはどんなものですか？

よくある例をひとつ、考えて見ましょう。数学の問題は、答えがただ１つある、と思っていませんか？確かに、入試問題では、結果はただ１つですね。「x＝２だよね？」と答え合わせして、同じなら安心します。違うとがっかりです。でも、入試問題はたいがい記述式ですね。結果に至る筋道（なぜそうなるのか）を記述することが解答です。筋道がきちんとしていれば、どんな筋道でも正解です。結果のみでは不正解とほとんど同等なんです。筋道がきちんとしていれば、たとえ最後の結果がたまたま間違ってしまっても高得点です。

基本的な事から筋道だてて進める様子を、「演繹的（えんえき）」と言います。いま述べたことは、数学が演繹的なものを重視することを表しています。しかし、日本の誇る数学者、高木貞治は、「数学が演繹的であるというが、それは既成数学の修業にのみ通用するのである。」（近世数学史談）と述べています。何事も、修業がつきものです。数学の修業のあり方と、数学そのものは、決して同じではありません。スポーツや武道・芸事・芸術だってそうでしょう？！そして、ほんとうにワクワクすることは、修業で身につけた力を自由に使えてこそ楽しめるのです。君が静岡大学理学部数学科に来たら、我々教員がコーチとなって、君の数学修業の手ほどきをします。

演繹的であることは、数学のとても重要な一面ですが、生きている数学の一側面でしかありません。最先端の数学はもっともっと混沌としていて、生き生きしていて、そして魅力的で感動的です。数学は、私にとっては、参加する皆が日々新しい喜びを見出し、共有できるお祭りなのです。参加するのには、ちょっと手間がかかりますが、その価値は十分にあります。数学というお祭りに、私たちといっしょに出かけましょう。そして、どうせなら、見物人ではなく参加者になりませんか。その為にこそ、数学科での（キビシイ？タノシイ？）数学修業があるのです。君の参加を待っています。参加のしかたはいろいろあります。なんといっても、学問は一生続くお祭りですから。（鈴木　信行）

大学の数学より

(1) オイラー数

図形 P のオイラー数 $\chi(P)$ を

$$\chi(P) = (\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数})$$

と定義します。

正多面体のオイラー数を計算してみましょう。よく知られているように正多面体は全部で５つあります。

正４面体： $4-6+4=2.$

正６面体： $8-12+6=2.$

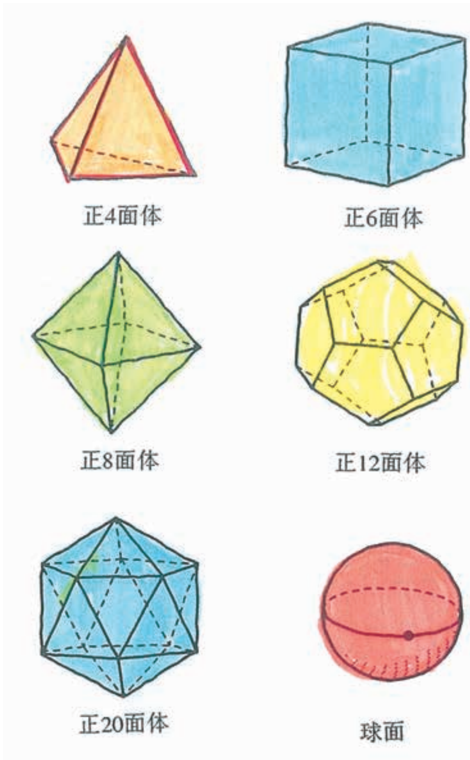
正８面体： $6-12+8=2.$

正12面体：$20-30+12=2.$

正20面体：$12-30+20=2.$

つまり、どの場合にも オイラー数は２になります。

次に、正多面体とかぎらず、図形がゴム等の伸縮性に富む理想的な弾性物質からできている場合を考えましょう。このような図形にも、多面体と同じようにして、頂点、辺と面を考えます。すると、「伸び縮みの変型で球面に変型できる図形のオイラー数はいつでも２」になります。なぜでしょうか？この証明にはいろいろな方法がありますよ。



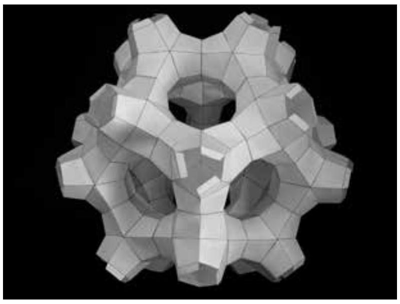
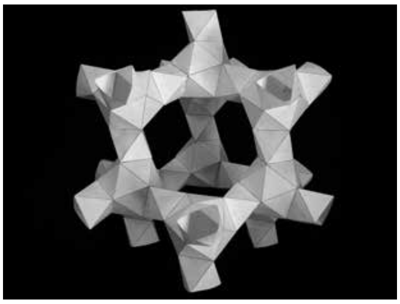
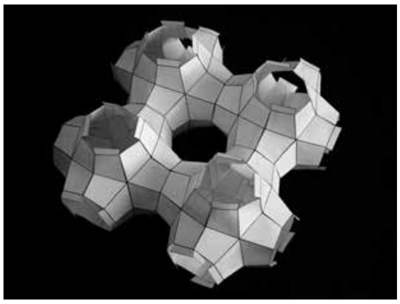
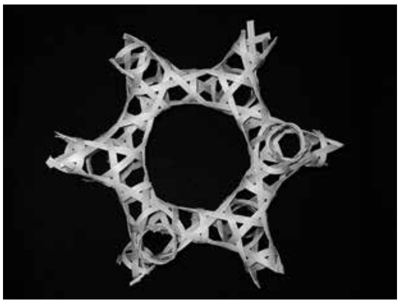
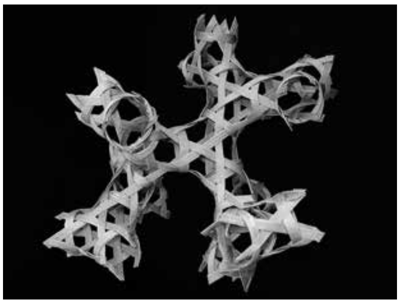
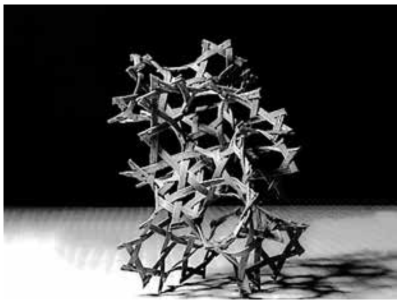
(2) 双曲幾何学

曲面の形や大きさを測るときに、無意識に使っている物差しはユークリッド距離だろう。この物差しで測ると、曲面によっては複雑に曲がって変化することがある。別の物差しを上手く使って、曲面の曲がり具合をどの場所でも『同じ』にできるだろうか？

多くの曲面は、双曲距離と呼ばれる物差しで、『同じ』曲がり具合を持つようにできる。双曲距離が入った曲面を双曲面と呼び、この曲面の幾何学を双曲幾何学と言う。

下の写真は、双曲面を目撃するために、双曲面の一部をユークリッド空間内に作成した近似図形である。一段目の写真は多角形を貼り合せた図形である。二段目の写真は竹で編んだ図形である。数学的な詳しい説明がなくても、写真の美しさを実感できるだろう。

双曲面は、自然界でも結晶や植物等の多くの形状に現れており、興味深い研究対象となっている、現代数学の進展から、非ユークリッド幾何学の一つである双曲幾何学は、とても豊かな世界であると認識されている。

(3) 高次方程式の解の公式

皆さんは２次方程式

$$ax^2+bx+c=0, a\neq 0$$

の解の公式は

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

であることは知っていますね。

それでは３次方程式

$$ax^3+bx^2+cx+d=0, a\neq 0$$

の解の公式はどうなるでしょう？それは右記に示したような大変複雑なものになります。普通の人ならここでやめてしまうかもしれませんが、数学が本当に好きな君のことなら４次以上の方程式の解の公式を求めてみたくなるでしょう。しかし実は一般には５次以上の方程式には右記のような解の公式が存在しないことがアーベルによって証明されています。その証明を理論化したのがガロアの理論です。大学の代数学ではこのガロアの理論を理解することがひとつの目標です。

$$x_1=\sqrt[3]{-\frac{\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bd}{3a^2}+\frac{d}{a}}{2}+\sqrt{\frac{(\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a})^2}{4}+\frac{(-\frac{b^3}{3a^3}+\frac{c}{a})^3}{27}}}$$
$$+\sqrt[3]{-\frac{\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bd}{3a^2}+\frac{d}{a}}{2}-\sqrt{\frac{(\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a})^2}{4}+\frac{(-\frac{b^3}{3a^3}+\frac{c}{a})^3}{27}}}-\frac{b}{3a},$$

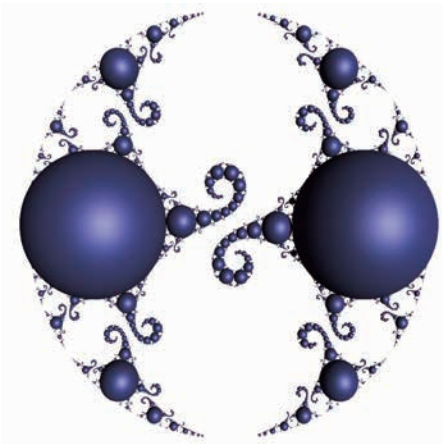
$$x_2=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bd}{3a^2}+\frac{d}{a}}{2}+\sqrt{\frac{(\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a})^2}{4}+\frac{(-\frac{b^3}{3a^3}+\frac{c}{a})^3}{27}}}$$
$$+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bd}{3a^2}+\frac{d}{a}}{2}-\sqrt{\frac{(\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a})^2}{4}+\frac{(-\frac{b^3}{3a^3}+\frac{c}{a})^3}{27}}}-\frac{b}{3a},$$

$$x_3=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bd}{3a^2}+\frac{d}{a}}{2}+\sqrt{\frac{(\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a})^2}{4}+\frac{(-\frac{b^3}{3a^3}+\frac{c}{a})^3}{27}}}$$
$$+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bd}{3a^2}+\frac{d}{a}}{2}-\sqrt{\frac{(\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a})^2}{4}+\frac{(-\frac{b^3}{3a^3}+\frac{c}{a})^3}{27}}}-\frac{b}{3a}.$$

(4) 数理論理学および数学基礎論

たとえば数学の証明に見られるような「推論」の構造を、数学的な手法で調べる分野が数理論理学です。

大学で数学を専攻すると、まずは、先達が苦労して見出した素晴らしい理論を学ぶことになります。こうした理論は定理とその証明によって記述されています。「ギリシャ以来、数学を語る者は証明を語る(ニコラ·ブルバキ)」。証明は基本的な事から筋道だてて推論することで記述されますので、数学自体の基礎付けを研究するには数理論理学が用いられます。数学の基礎付けを研究することから始まった分野が数学基礎論です。言わば、数学の数学ですね。そこでは「証明」「真偽」や、数学の基礎概念である「集合」「計算」等といったものを対象としています。そして、多くの興味深い現象を見出しています。

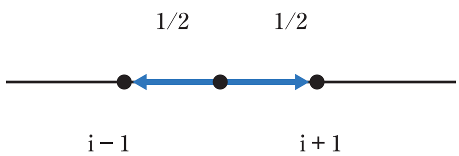


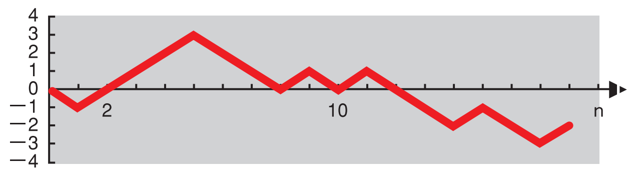
また最近では、他の多くの分野との関わりも深まっています。このような広がり·深まりを総合的に視野に入れて、改めて「数理論理学」と称されることもあります。

静岡大学理学部数学科には専門家がおります。これは、他の大学に無い特徴と言って良いでしょう。その意味でも、静岡大学理学部数学科は、この分野を学ぶにはとても優れた環境を有するものと思います。

(5) ランダムウォークの再帰性について

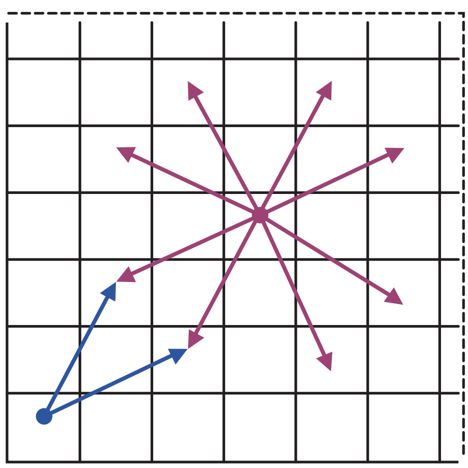
直線上一つの粒子が繰り返し各回ごとにそれぞれ 1/2 の確率で 1 の距離だけ右と左に移るとする。左図のように i から 1 回で i -1 に 1/2、 i +1 に 1/2 の確率で移る。このでたらめの動きを一次元のランダムウォークという。





右図に原点から出発し、回数 n とともに移動する粒子の動く様子をグラフで表す。0 の位置から出発したとき有限回でもとに戻る性質がある。これを再帰性という。しかし戻るまでの回数の平均、すなわち期待値は無限である。

今の例は無限個の状態があるものであるが、別の例として、有限の図形の上のランダムウォークを考えよう。



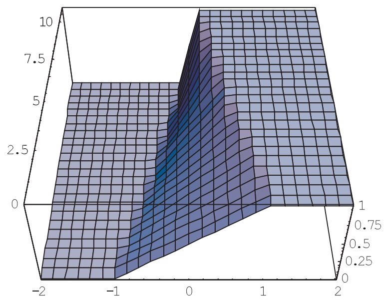
チェスのナイトの駒がチェスの 8 × 8 のマスを動くとする。繰り返し各回ごとに同じ確率で他のマスへ移るとする。たとえば，中の場所では移ることができる場所は 8 個あるので、移る確率はそれぞれ 1/8 の確率であり、四隅では 1/2 の確率である。このランダムウォークは有限回でもとに戻ることがわかり、四隅から出発したとき、平均で考えるともとに戻るまでの回数の平均、すなわち期待値は計算すると 168 である。また、キングの駒についても同様に考えられ、もとに戻る回数の期待値は四隅では 140、中では 105/2 である。これらは一般にマルコフ連鎖と呼ばれる。

(6) 差分近似による数値解法について

微分積分学を使って車の流れを記述できることを知っていますか。車の流れは、例えば、東名高速道の静岡インターチェンジ付近を午前９時に走行している車の混み具合を表すために、位置 x と時間 t の関数である交通密度 $u(x,t)$ と観測により決められる関数 Q を用いて、微分をふくむ方程式

$$(\partial/\partial t)u(x,t)+(\partial/\partial x)Q(u(x,t))=0$$

で記述されると考えられています。ただし、$(\partial/\partial t)u(x,t)$ は、t に関する $u(x,t)$ の微分を表します。現象を視覚化するためにコンピュータによるシミュレーションが行われていることを知っている人もいるでしょう。ここではその一端を紹介しましょう。微分には極限の概念が伴いますので、それを避けるために、微分を用いて表現される方程式の解法には、その微分を前進差分、後退差分、中心差分と呼ばれる３つの差分におきかえて考察する方法があります。では、シミュレーションに利用される交通流に対する差分方程式にはどのようなものがあるのでしょうか。t に関する差分として前進差分、x に関する差分として誤差の少ない中心差分を採用することが考えられます。その際、差分方程式の解が厳密な解に収束するか、という数学の問題が生じます。それを解決するために Lax と Friedrichs により工夫された差分方程式が有名です。

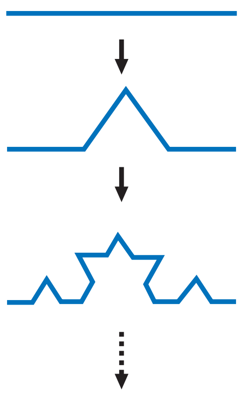


左図は、Lax と Friedrichs による差分方程式を用いて、ある位置から先にいる車が赤信号または交通事故などの原因ですべて停止している状態から、車の密度がどのように変化するかをシミュレーションしたものです。ただし、z 軸は車の密度、y 軸は車の位置、x 軸は時間を表します。この結果は予想できますが、本来、シミュレーションは、初期の状態から時間が経過した後の状態を予測するために利用されています。

このような研究において、実解析学、函数解析学、偏微分方程式論という学問が重要な役割を果たしています。また、これらの分野は相互に刺激し合いながら発展しています。

(7) フラクタル図形

海岸線や樹木の形状などのギザギザとした複雑な図形を、もっと数学的に把握しようと、フラクタル図形の概念が提唱された。図形の一部を拡大すると、全体とよく「似た」形が現れる図形をフラクタル図形と呼ぶ。フラクタルは「断片的」を語源とする造語である。近年のコンピューターの進歩により、魅惑的なフラクタル図形の概形を、容易に作成できるようになった。ここでは、極限の神秘さを見ることができるような簡単なフラクタル図形を構成しよう：


コッホ曲線

左図のように、線分（一辺）を三等分して中央部分だけをつまみ上げ、同じ長さを持つ四つの辺に変形する操作を考える。これは一目瞭然な操作である。各辺に、この操作を繰り返して、折り曲げて行く。この操作を限りなく繰り返すことで、

（１）どの部分にもギザギザが無数にある（どの部分にも接線が引けない）、

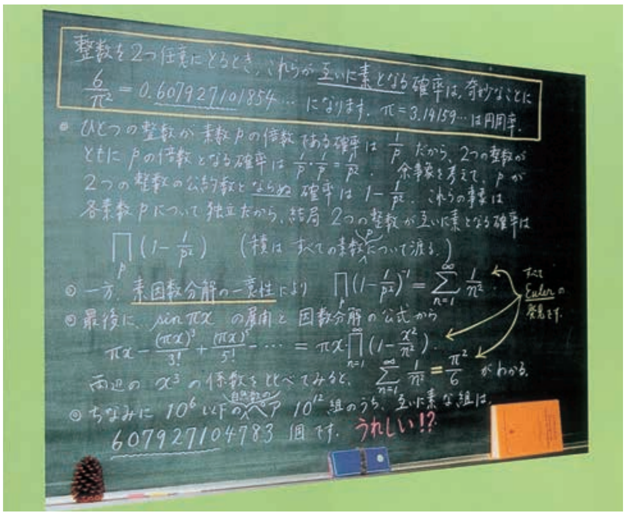
（２）図形の一部を拡大すると再び全体と同じ形が現れる（フラクタル図形）、

という不思議な図形ができる。このフラクタル図形はコッホ曲線と呼ばれる。

この操作を無限回という極限まで繰り返すことは無理なので、コッホ曲線を見ることは現実には不可能である。見ることができるのは、あくまで途中の操作までの近似図形である。しかし、コッホ曲線は本当にあるのである！私達が有限世界に住んでいることを実感する時でもある。このような無限の操作を行うことで、様々なフラクタル図形を作ることができる。これらの図形の複雑さを、ハウスドルフ次元と呼ばれる「物差し」で測ることができる。コッホ曲線のハウスドルフ次元は log ４/log ３=1.26…で、線分の場合の１より大きくなることが示されている。

数学科教員の紹介

　数学科の教員は、広大な数学の世界の基礎に触れ、数学の美しさを知る分野から構成される基礎数理講座と人間社会や環境を観察する際の新たな視点の習得に繋がる分野から構成される数理解析講座に所属しています。各教員の研究内容を紹介します。



基礎数理講座

浅芝　秀人　（代数学）

多元環の表現論の研究、特に、自己入射多元環の導来同値分類と圏作用のもとでの線型圏の双圏論的被覆理論

鈴木　信行　（数理論理学）

非古典論理の意味論的研究、特に、Kripke 意味論とその拡張による中間述語論理や様相述語論理の研究

毛利　出　（代数学）

非可換代数曲面の分類、特に、非可換スキーム上での交叉理論、量子射影空間・量子線織曲面の研究

久村　裕憲　（微分幾何学および偏微分方程式論）

リーマン多様体と熱核の収束の研究、多様体上のラプラス作用素のスペクトル・調和関数の研究

保坂　哲也　（幾何学、位相幾何学、特に幾何学的群論）

群作用のある CAT(0) 空間の研究、無限コクセター群の研究、CAT(0) 空間の境界の位相構造に関する研究

依岡　輝幸　（数理論理学、特に公理的集合論）

無限集合（特に実数直線）上の組合せ論、アレフ１上の様々な構造についての研究、強制法理論

木村　杏子　（代数学）

スタンレー・ライスナーイデアルの研究、特に、算術階数や極小自由分解に関する研究

数理解析講座

松本　敏隆　（関数解析学）

作用素論的および実解析的手法による偏微分方程式の研究

田中　直樹　（実解析学）

無限次元空間における指数関数の構成方法及び自然現象を記述する偏微分方程式の実解析的立場からの研究

横山　美佐子　（計算数学および位相幾何学）

情報依存計算量の理論に基づく写像度の計算、曲線の安定形の正確な計算、３次元軌道体の構造の研究

足立　真訓　（複素解析幾何学）

複素解析幾何学、特に、複素多様体内の弱擬凸領域における複素関数論