静岡大学大学院理学研究科
修士課程・数学専攻
平成２２年度入学試験問題

専　門（数　学）

注意事項：

$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ はすべて解答せよ．
$\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}\boxed{7}$ $\boxed{8}\boxed{9}$から２問を選び解答せよ．３問以上解答してはいけない．
なお解答用紙は問題ごとに別にし，各用紙に問題番号を明記せよ．

$\boxed{1}$

次の (1), (2) より, 1 問を選んで解答せよ.

(1) 積分値 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ を求めよ.

(2) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 及び $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ を C^1 級の写像とし, $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = (0,0)\}$ と置く. ここで, 各 $q \in S$ に対し g の Jacobi 行列 $(Dg)(q)$ の階数は 2 と仮定し, f の S への制限関数 $f|_S$ の極値問題を考える. このとき, $f|_S : S \to \mathbb{R}$ が $p_0 \in S$ において極値を取れば, $\operatorname{grad} f(p_0) = \lambda_1 \operatorname{grad} g_1(p_0) + \lambda_2 \operatorname{grad} g_2(p_0)$ となる実数 λ_1 と λ_2 が存在することを示せ. ここで, $g(x) = (g_1(x), g_2(x))$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, また, $\operatorname{grad} f(p)$ は, 関数 f の $p \in \mathbb{R}^n$ における勾配 (gradient) を表す.

$\boxed{2}$

n を正の整数，$M_n(\mathbb{C})$ を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の n 次正方行列全体のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする．各 $X \in M_n(\mathbb{C})$ に対して，

$$E(X) := \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid MX = XM\}$$

とおく．$A \in M_n(\mathbb{C})$ とし，J を A のジョルダン標準形とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $E(A)$ が $M_n(\mathbb{C})$ の部分空間であることを示せ．

(2) $E(A)$ と $E(J)$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間として，同型であることを示せ．

(3) A が次の行列であるとき，J と $E(A)$ の次元を求めよ．(注意：A から J への変換行列は求めなくてよい．)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$

$\mathbb{R}$ は実数全体の集合, $\mathbb{Q}$ は有理数全体の集合, $\mathbb{P}$ は無理数全体の集合とする.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次のように定義する.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ x-1 & (x \in \mathbb{P}) \end{cases}$$

このとき,
(i) f は全射になるか.
(ii) f は単射になるか.

(2) $\mathbb{R}$ は通常の位相が入っているものとする. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次のように定義する.

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ -1 & (x \in \mathbb{P}) \end{cases}$$

このとき, g は連続になるか.

(3) $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ は それぞれ, 1 次元ユークリッド空間, 2 次元ユークリッド空間とし, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ は $\mathbb{R}^2$ の部分空間 とする. このとき, A は $\mathbb{R}^1$ と同相になることを証明しなさい.

$\boxed{4}$

R と S を可換環，$\varphi : R \to S$ を全射環準同型とせよ．

(1) 任意の元 $a \in R$ に対して, $\varphi(\langle a \rangle) = \langle \varphi(a) \rangle$ となることを証明せよ．ここで $\langle a \rangle$ は a で生成された単項イデアルをあらわす．

(2) R が単項イデアル環ならば, S も単項イデアル環であることを証明せよ．ここで単項イデアル環とは, 任意のイデアルが単項イデアルである環のこと．

(3) 整域でない単項イデアル環の具体例をひとつあげよ．

$\boxed{5}$

以下の小問に答えよ.

(1) 整関数 $f(z)$ は, すべての $z \in \mathbb{C}$ にたいし,

$$Re\ f(z) \leq M\,(< +\infty) \quad (M \text{ は定数})$$

を満たすとする. このとき, $F(z) := e^{f(z)}$ は有界な整関数となり, $F(z)$ したがって $f(z)$ が定数関数となることを示せ.

(2) 有理関数 $g(z) = \dfrac{1}{((z-1)(z-2)}$ のローラン展開を

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 2 < |z|\},\ D_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 1 < |z| < 2\}$$

において求めよ.

(3) 有理関数 $h(z) = z + \dfrac{a}{z} + \dfrac{b}{z-2} + \dfrac{c}{(z-3)^2}$ （ただし, a, b, c は 0 でない定数）にたいして, 円

$$C_1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\},\ C_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 4\}$$

に沿う積分 $\displaystyle\int_{C_j} h(z)\, dz$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta}\, dz$ を求めよ.

$\boxed{6}$

$(S, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とし, 積分可能な関数の全体を L^1 で表す. $f, g \in L^1$ に対して, $f(x) = g(x)$ $(a.e.)$ のとき, $f = g$ と定める. 通常の線形演算により L^1 は線形空間である. $f \in L^1$ に対して, $\|f\| = \int_S |f| \, d\mu$ と定める. つぎの各問に答えよ.

(1) L^1 は $\|\cdot\|$ をノルムとするノルム空間であることを示せ.

(2) L^1 における点列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ が $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < \infty$ を満たすならば, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は $a.e.$ で収束し, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in L^1$ であることを示せ.

(3) $\{f_n\}_{n\geq 1}$ を L^1 におけるコーシー点列とするとき, 自然数列 $\{n_k\}_{k\geq 1}$ が存在して

$$n_k < n_{k+1}, \qquad \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < 1/2^k \qquad (k \geq 1)$$

が成り立つことを示せ.

(4) L^1 は $\|\cdot\|$ に関して完備であることを示せ.

$\boxed{7}$

正方形 $\mathbb{I}^2 = \{(s,t) : 0 \leq s, t \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ において, $(0,t)$ と $(1, 1-t)$ を同一視して得られる商空間（メビウスの帯）M, 自然な射影 $p : \mathbb{I}^2 \to M$ として, その部分空間 $S = p(\mathbb{I} \times \{1/2\}), T = p(\mathbb{I} \times \{0,1\}) \subset M$ とする. このとき次の問に答えよ.

(1) S と T が同相であることを示せ.

(2) M から S の上へのレトラクションが存在することを示せ.
ただし, 位相空間 X からその部分空間 $A \subset X$ への連続写像 $r : X \to A$ で

$$r(a) = a \quad \text{for all } a \in A$$

であるもとを X から A の上へのレトラクションという.

(3) M から T の上へのレトラクションが存在しないことを示せ.

$\boxed{8}$

確率変数 X_1 は標準正規分布に従い，確率変数 X_2 はパラメーター 1 の指数分布に従い，互いに独立とする．すなわち 2 次元確率変数 (X_1, X_2) の 密度関数 $f(x_1, x_2)$ が

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_1^2/2 - x_2} & (\ \infty < x_1 < \infty,\ x_2 > 0\ ) \\ 0 & (\ \text{otherwise}\ ) \end{cases}$$

で与えられるとする． 確率変数 Y_1, Y_2 を $Y_1 = X_1^2 + 2X_2, Y_2 = X_1/\sqrt{X_1^2 + 2X_2}$ と定義するとき，次の問いに答えよ．

(1) 写像 $T : (-\infty, \infty) \times (0, \infty) \to (0, \infty) \times (-1, 1)$ を
$y_1 = x_1^2 + 2x_2,\ y_2 = x_1/\sqrt{x_1^2 + 2x_2}\quad (\ x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 > 0\ )$
と定めるとき，T の逆写像 S を求めよ．また写像 S のヤコビアン $J = \dfrac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)}$ を求めよ．

(2) (Y_1, Y_2) の 密度関数 $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$ を求めよ．

(3) Y_1 の 密度関数 $f_{Y_1}(y)$， Y_2 の 密度関数 $f_{Y_2}(y)$ をそれぞれ求めよ．

(4) Y_1 と Y_2 は独立であること示せ．

$\boxed{9}$

群の公理を定義するために, 適切な言語を一つ指定し, 群の公理を表す論理式 φ_0 を書け.

また, アーベル群の公理を表す論理式 φ_1 を書き, $\varphi_0 \vdash \varphi_1$ が成り立たないことを証明せよ.

さらに, この言語のもとで,

(1) 有限群の全体が公理化可能であるかと, 有限公理化可能であるか,

(2) 捩れの無いアーベル群の全体が公理化可能であるかと, 有限公理化可能であるか,

を述べ, その理由を説明せよ.

ここで, G が捩れの無いアーベル群であるとは, x が G の零元以外の元で, n が正の整数ならば, nx が零元ではないことを言う.