

# 正則化回帰法 elastic net による地殻変動データ逆解析： 東海スロースリップイベント・2011年東北地方太平洋沖地震の例

三井雄太<sup>1</sup>・中野隼輔<sup>2</sup>・森上竣介<sup>1</sup>

## Inversion analysis of crustal deformation data by a regularized regression method of elastic net: Case studies for the Tokai slow slip event and the 2011 Tohoku earthquake

Yuta MITSUI<sup>1</sup>, Shunsuke NAKANO<sup>2</sup>, Shunsuke MORIKAMI<sup>1</sup>

**Abstract** We try applying a regularized regression method of “elastic net”, which naturally combines L2 regularization (for smoothing) and L1 regularization (for sparsity) with two hyperparameters, to inversion analysis of crustal deformation using on-land GNSS data. For an example of the Tokai slow slip event in the early 2000s, we obtain an overall consistent solution with previous studies for seismic moments. The Tokai slow slip event started shortly after the 2000 Izu islands earthquakes, and ended under screen of the 2004 Kii-Hanto earthquake and their postseismic deformation. For the other example of the 2011 Tohoku earthquake, we also obtain a similar solution with previous studies for seismic moments, but the estimated large slip areas are mainly located near the trench. This point is far from previous inversion studies using on-land GNSS data.

**Key words:** Regularized regression, elastic net, machine learning, inversion, crustal deformation, GNSS, Tokai slow slip events, 2011 Tohoku earthquake.

### はじめに

固体地球物理学分野において、観測データ群  $d$  とモデル  $m$  との関係は、以下のような線形の観測方程式として記述されることが多い。

$$Gm=d$$

ここで  $G$  は、理論的に導出済み、もしくは経験的な手法により得られる応答関数を表す。

この観測方程式からモデル  $m$  の具体的な解を推定する逆解析（インバージョン）を行う際、最も初等的な方法は、データとモデルとの残差二乗和  $rs = \|Gm - d\|^2$  を最小にする、いわゆる最小二乗法である。最小二乗法の解  $m_{rs}$  は、 $m_{rs} = (G^T G)^{-1} G^T d$  で与えられる。この解の意味

は明快であるが、実際の問題にこの解を適用すると、しばしば現実性を欠く「異常な」解が得られることになる。この「異常さ」は、データへの過剰適合（オーバーフィッティング）に由来し、未知の観測データへの予測性（汎化性能）の不足とみなせる。具体的に言い換えると、観測データに含まれる測定誤差や、不適切なモデル設定の悪影響を受け、最小二乗解が現実性を欠くものになってしまう。

この問題に対処するため、固体地球物理学分野の逆解析では、様々な方策が取られてきた（松浦（1991）；Aster et al.（2012）など参照）。近年、多くの研究で採用されているのが、測定誤差や解の時空間分布の滑らかさなどの統計的性質を正規分布と仮定し、これらの仮定と観測

<sup>1</sup> 静岡大学大学院理学研究科地球科学教室，〒422-8529 静岡市駿河区大谷836

<sup>2</sup> 元・静岡大学理学部地球科学科

<sup>1</sup> Institute of Geosciences, Shizuoka University, 836 Oya, Suruga-ku, Shizuoka, 422-8529 Japan

<sup>2</sup> Faculty of Science, Shizuoka University

E-mail: mit@shizuoka.ac.jp (Y. M.)

方程式からベイズの定理により導出される事後確率密度を最大にする方法である(深畑(2009)などに詳しい)。一方で、最小二乗解の枠組みを保持しながらデータへの過剰適合を抑制する、正則化と呼ばれる方法も発達している。

正則化には、大きく2種類の手法がある。1つめの手法では、 $G$ を特異値分解し、小さな特異値を持つ成分を除去することで、最小二乗解 $m_{rs}$ の $(G^T G)^{-1} G^T$ の部分を補正した解を得る(Jackson(1972)など)。2つめの手法では、残差二乗和 $rs = \|Gm - d\|^2$ に追加の項を付け加えたものを最小にする。

2つめの正則化手法の具体形として最も頻繁に採用されてきたのは、残差二乗和 $rs$ に加えて解のL2ノルム $\|m\|^2$ も同時に小さくするという狙いの下で、目的関数 $rid = \|Gm - d\|^2 + \lambda \|m\|^2$ を最小にするL2正則化法(チホノフの正則化、リッジ回帰などとも呼ばれる)である。 $\lambda$ はハイパーパラメータとなる。この場合の解 $m_{rid}$ は、 $m_{rid} = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T d$ で与えられ、ダンピング付き最小二乗解と呼ばれる。L2正則化には、解のバラつきを小さくする効果があり、結果としてデータへの過剰適合が抑制される。これに類似した手法として、残差二乗和 $rs$ と解のL1ノルム $\|m\|$ を同時に小さくするため、目的関数 $las = \|Gm - d\|^2 + \lambda \|m\|$ を最小にするL1正則化法(ラッソ回帰とも呼ばれる)がある。L1正則化には、 $m_{rs}$ や $m_{rid}$ のような解析解はなく、数値的に解を探索する必要がある。L1正則化で得られる解には、パラメータの数が縮減される性質(スパース性)があり(Tibshirani, 1996)、結果としてデータへの過剰適合が抑制される。

L1正則化は、機械学習分野の基本的手法ではあるが、固体地球物理学分野にも適用例が増えてきた。例として、Evans and Meade(2012)は、2011年東北地方太平洋沖地震の発生に伴う日本列島の地殻変動のデータから、L1正則化を用いてプレート境界断層のすべりを逆解析した。その結果、L2正則化を用いて逆解析した場合と比べて、狭い空間範囲に集中したすべり分布が推定された。

L2正則化とL1正則化は、それぞれ異なったアプローチによって最小二乗法の汎化性能を増大させるもので、どちらが優れているという性質のものではない。そこで、両者を組み合わせた形の目的関数を最小化するアルゴリズムが考えられる。最近、Nakata et al.(2016)はこのような観点から新しい目的関数を設定し、地殻変動逆解析のテストを行った。Nakata et al.(2016)の導入した目的関数には、3種類のハイパーパラメータが含まれるため、それらの推定プロセスが複雑になってしまうという問題がある。一方で、既にZou and Hastie(2005)により、L2正則化とL1正則化とを自然に組み合わせた一般的な正則化回帰法elastic netが提唱されている。Elastic netでは、ハイパーパラメータの数が2つと少なく、推定のための条件が良い。よって本研究では、このelastic netを採用し、地殻変動データの逆解析を試行する。研究対象としては、2000年代前半に東海地方下で生じたスロースリップイベント(水藤・小沢, 2009; Ochi and Kato, 2013など)並びに2011年東北地方太平洋沖地震(Iinuma et al., 2011; Ozawa et al., 2011など)を選択した。

## 手法

Elastic netの目的関数を、

$$ela = \frac{\|Gm - d\|^2}{2N} + \lambda \left( \alpha \|m\| + \frac{(1-\alpha)}{2} \|m\|^2 \right)$$

という形とする(Friedman et al., 2010)。本研究では、データ $d$ として国土地理院GEONETのGNSS観測データ(水平2成分)の解析結果を用いる。モデル $m$ は設定した断層群のすべり量(strike方向とdip方向の2成分ずつ)となる。 $G$ は、3次元半無限均質弾性体中のグリーン関数(Okada, 1992)に基づいて計算する。 $N$ はデータの数である。

上記目的関数 $ela$ を最小化する際のハイパーパラメータ $\lambda$ ,  $\alpha$ については、k-fold cross-validation法に基づき(kの値は10とした)、以下の手順で最適化する。(1) $\alpha$ を0とする。(2)k-fold cross-validationを行い、最適な $\lambda$ を推定する。具体的には、 $\lambda$ を変更しながらデータをランダムにk個のグループへ分割し、1グループずつ抽出して最小二乗解を得た上で、残差の平均値を求める。その値が最小となる $\lambda$ を推定する。(3) $\alpha$ を0から1まで0.2刻みで変更し、それぞれの場合で同様にcross-validationを行う。Cross-validation時の残差が最も小さかった場合の $\alpha$ を抽出する。(4)上記プロセスを30回繰り返し、抽出した $\alpha$ の最頻値を最適な $\alpha$ とする。(5)最適な $\alpha$ を用いて、改めてcross-validationを行い、最適な $\lambda$ を推定する。以上の手順を踏み、(4)(5)で得られた最適な $\alpha$ ,  $\lambda$ の値を使って目的関数を最小化する。これにより、モデル断層を設定すれば、他に一切の仮定なく逆解析の結果が出力され、データに対して最適な解を得ることができる。

## 結果と議論：東海スロースリップ

まず、2000年代前半に東海地方下の沈み込みプレート境界で生じたスロースリップイベント(水藤・小沢, 2009; Ochi and Kato, 2013など)をテストケースとして、逆解析を行う。東海地方は、駿河トラフから伊豆マイクロプレートがユーラシアプレートの下へほぼ西向きに沈み込む、と考えられている領域にあたる(Sagiya, 1999など)。1854年の安政東海地震をはじめ、過去に複数のM8級地震の震源域となってきた(瀬野, 2012など)。

国土地理院が配布しているGEONETのF3解(中川・他, 2009)の1日サンプリング地表変位データを使用する。時間範囲は、1997年4月1日から2007年9月30日までとし、空間範囲は、東経137.0°から東経139.0°まで、かつ、北緯34.6°から北緯35.4°までの領域とした。この領域内にあるGEONET観測点は85点あるが、予備的な解析で不安定な地表変位データが見られたGEONET観測点「970816」「970817」「93101」の3点は使用しないこととした。また、固定局を、望月・三井(2016)と同じGEONET観測点「960593」(万場)とした。同観測点は日本周辺のプレート境界から比較的離れており、それら由来の非定常変動の影響が及びにくいと考えられるためである。

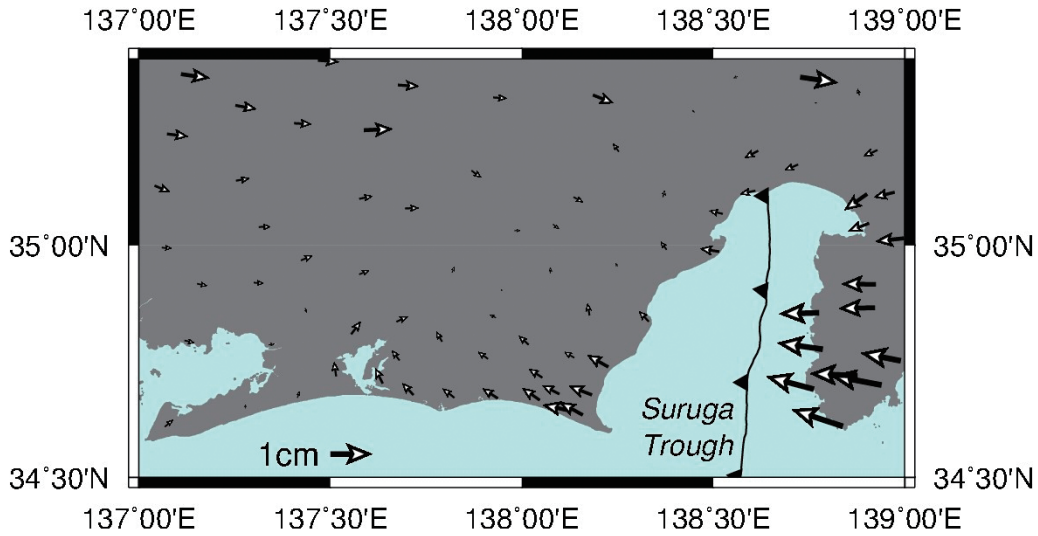
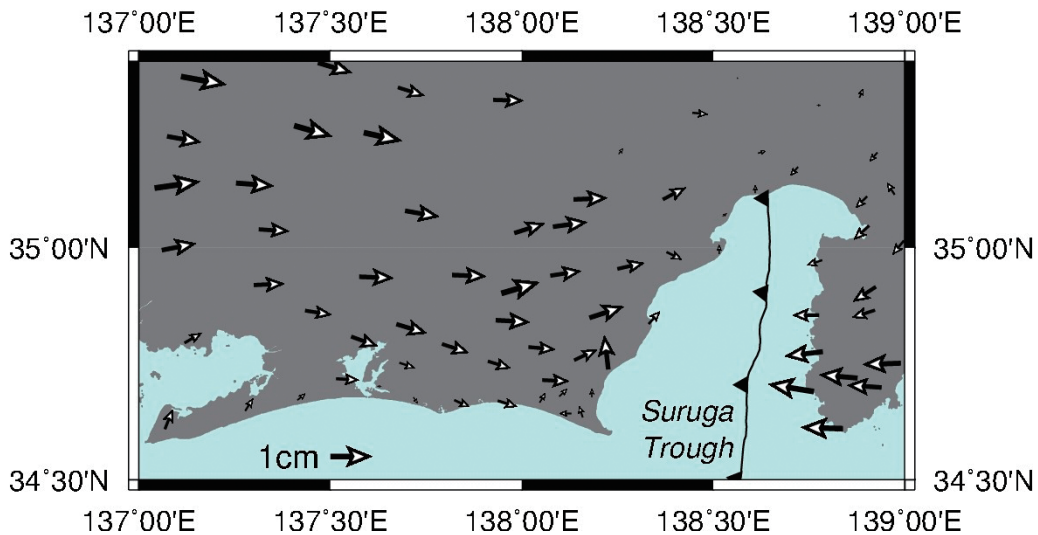
**(a) 2006/9 - 2007/9****(b) 2001/12 - 2002/12**

Fig. 1. Annual displacement around the Tokai region based on GEONET data. The reference station is Manba, numbered 960593, at 138.912°E and 36.143°N. (a) During a period between September 2006 and September 2007. (b) During a period between December 2001 and December 2002.

対象とする東海スロースリップイベントとは異なる非定常イベント（大きな地震、火山活動）によるオフセットが、地表変位の時系列データに含まれている。イベントは、2000年の伊豆諸島北部群発地震（三宅島の火山活動に伴う）、2001年の静岡県中部の地震、2004年紀伊半島南東沖地震、2007年新潟県中越沖地震の4つを考慮する。これらについて、発生日月日近辺のオフセットが0となるような補正を行った。具体的には、オフセット日を設定し、その前後3日間ずつにおける座標値の中間値の差が0となるように、オフセット日以降のデータを補正した。オフセット日は、2000年7月1日～8月27日、2001年4月3日、2004年9月5日、2007年7月15日～16日とした。アンテナ交換に伴う人為的なオフセットの補正も同様に行った。

Fig. 1(a)に、2006年9月から2007年9月の1年間にかけて、各月の座標値の中間値から算出した地表変位ベクトルを示す。1年間の変位なので年周変動の影響は無い。駿河トラフの西側沿岸、特に、南端の御前崎付近では、ほぼ西向きの変位が観測されている。これは、駿河トラフの東側沿岸の伊豆半島の運動方向と同センスであり、沈み込むプレート境界の固着を表していると考えられる。駿河トラフより西側の内陸での変位は全般に小さい。一方、Fig. 1(b)に示した、2001年12月から2002年12月にかけての地表変位では、駿河トラフより西側の内陸でほぼ東向きの系統的な変位が見られる。

Fig. 2に、Fig. 1(b)のデータに対して逆解析を行った結果をまとめる。モデルとして、沈み込みプレート境界と調和的な位置に、矩形のモデル断層を10枚設定した。



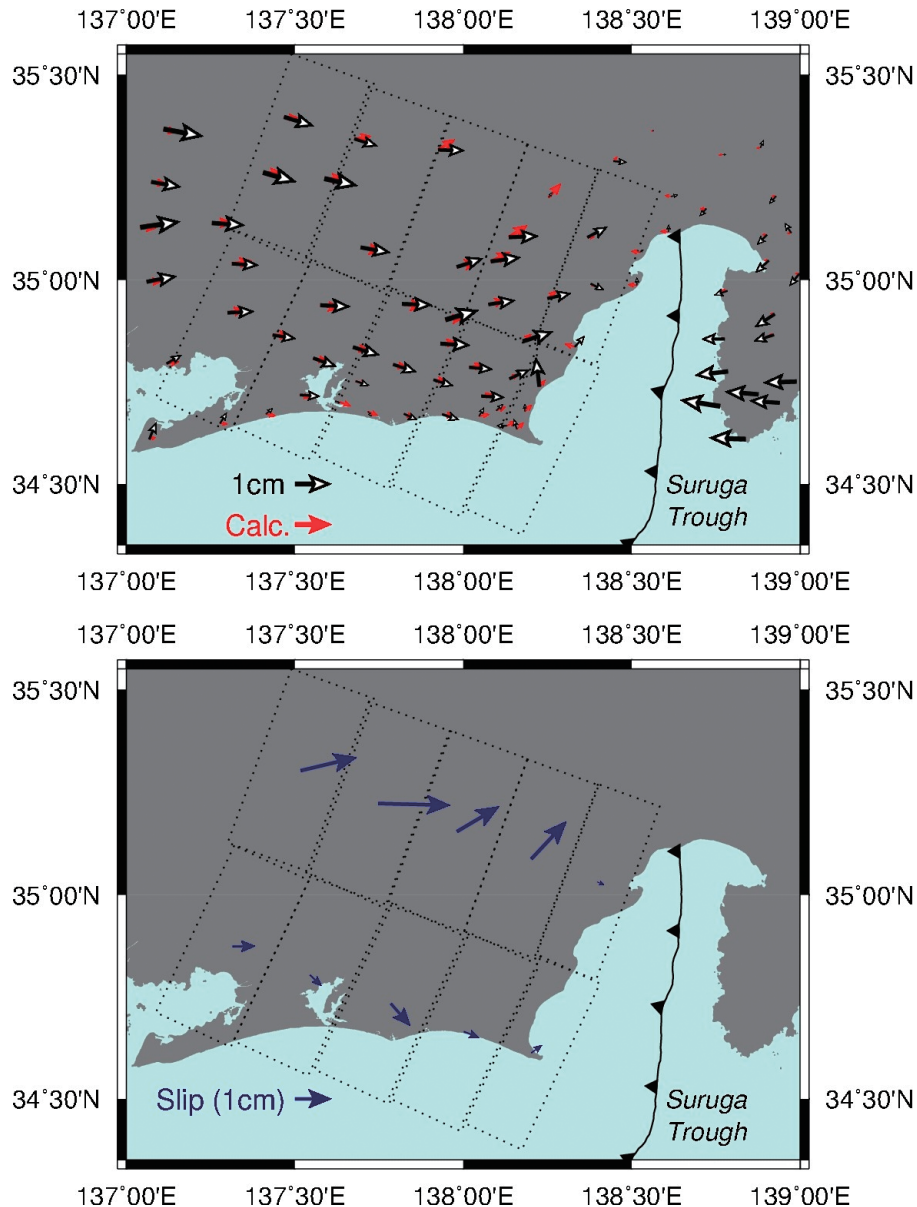


Fig. 2. Inversion result for the annual displacement data in Fig. 1(b). The red arrows in the upper figure represent calculated surface displacement, comparable to the black arrows of the observed displacement. The blue arrows in the lower figure illustrate fault slips.

Elastic netに基づく解析の結果として、 $\alpha = 0, \lambda = 0.0013$ を得た。なお、30回の試行で、 $\alpha$ は常に0となった。結果を見ると、まずFig. 2の上図に関して、計算された地表変位は、駿河トラフより西側の地表変位について観測データをほぼ説明できていることがわかる。一方、駿河トラフより東側の観測データは全く説明できていない。これは、伊豆マイクロプレートの独立した剛体回転運動(Nishimura et al., 2007など)を別個にモデル化する必要があることを示唆する。これについては、Mochizuki and Mitsui (2016)の方法を利用可能なので、今後の課題とする。次にFig. 2の下図に関して、計算された断層すべりは全体として海溝向きの逆断層運動であり、プレート沈み込みによる歪みを一部解放するスロースリップイベントが生じたと解釈できる。また、内陸側の一部断層において北向きの右横ずれ成分が卓越している。

次に、スロースリップイベントの推移を見るため、1997年4月から2007年9月までの期間、1年間の時間幅で3か月ごとに(最初のみ2か月)地表変位ベクトルを算出し、プレート境界のモデル断層群のすべりを逆解析した。Fig. 3に、逆解析の結果から計算した、モデル断層群における1年あたりの地震モーメント( $\dot{M}_0$ )の合計が時間発展する様子を示す。ここで、 $\dot{M}_0$ を計算する際の断層すべり量は、東西成分のみを使用した。これは、逆断層運動を近似的に表す。剛性率は30GPaとした。2000年の伊豆諸島北部群発地震(三宅島の火山活動)と2004年紀伊半島南東沖地震との間の時期に $\dot{M}_0$ が前後の期間と比べて大きくなっており、この時期にスロースリップイベントが発生していたことを示唆する。

本研究の結果は、以下の3点において、本研究同様にGEONET観測点のデータを用いているが解析の手法が異

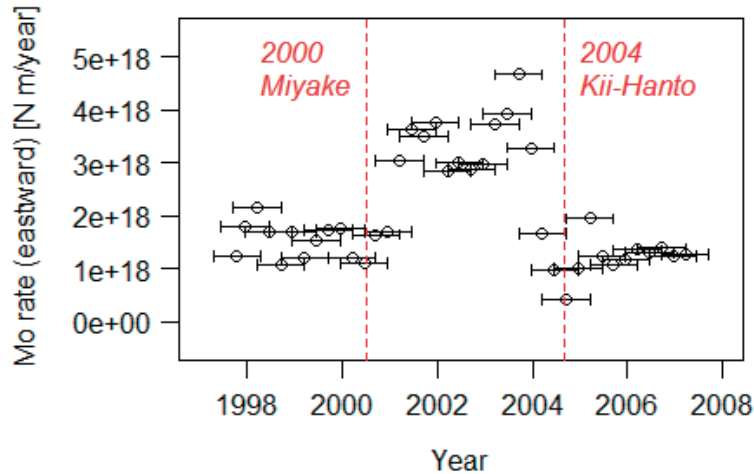


Fig. 3. Temporal evolution of moment release rate (eastward). The circles show midpoints of the annual periods represented by the horizontal bars. The red broken lines exhibit the occurrences of the 2000 Izu islands earthquakes (volcanic activities of Mt. Miyake) and the 2004 Kii-Hanto earthquake.

なる先行研究と、おおむね調和的である。

(1)まず発生時期について、Fig. 3より、2000年伊豆諸島北部群発地震（三宅島の火山活動）が終了した後にスロースリップイベントが発生し、スロースリップイベントが終息するより前もしくは同時に2004年紀伊半島南東沖地震が発生したことがわかる。その直後には、2004年紀伊半島南東沖地震による南南西向き余効変動が生じたと考えられ（水藤・小沢, 2009）、それに紛れてスロースリップイベントは終息している。また、スロースリップイベントの $\dot{M}_0$ には2回のピークがあり、中間の2002年後半頃に一度減少したことがわかる。この傾向は、水藤・小沢（2009）による東海スロースリップのモーメント解放の推定値にも見られる。スロースリップイベントの発生前・発生後でも $\dot{M}_0$ が正の値を取るの、主として北西側の内陸部で常にほぼ東向きの地表変位が観測されるためである（Fig. 1(a)参照）。これは、深部プレート境界が固着していないことを示唆する。

(2)本研究で推定したスロースリップイベントのモーメント解放量は、2001年から2004年ごろにかけて、 $15 \times 10^{18}$  [N m] 程度であり、解析手法が異なる先行研究（Ozawa et al., 2016）と倍半分ほどの違いこそあるが、大きくは異なる。モーメントマグニチュードは、本研究では約6.7となった。なお、先行研究では、水藤・小沢（2009）が7.1、Ochi and Kato（2013）が6.6と報告している。

(3)本研究のスロースリップイベントの空間分布（Fig. 2参照）は、先行研究の水藤・小沢（2009）よりも内陸側に偏っているが、この点はOchi and Kato（2013）と調和的と言える。ただし、本研究で東経138度以東にまで断層すべりが広がっている点は、いずれの先行研究の結果にも見られない特徴である。

### 結果と議論：2011年東北地方太平洋沖地震

次に、2011年3月11日に東北地方沖の沈み込みプレート境界で生じた東北地方太平洋沖地震をテストケースと

して、逆解析を行う。東北地方は、日本海溝から太平洋プレートが北米プレートの下へほぼ西向きに沈み込む領域で、東北地方太平洋沖地震はほぼ全ての歪みを解放するような地震であったと考えられる（深畑ほか, 2012など）。

東北地方周辺にある169点のGEONET観測点の、30秒サンプリングRINEXデータを使用する。RINEXデータから30秒サンプリングのハイレート解析を行い、地表変位データを計算する。これにあたって、国土地理院が公開しているマルチGNSS解析ソフト「GNSS Surveying Implementation Library (GSILIB)」を用いた。手法はキネマティック測位とし、固定局のGEONET観測点は「940013」（小樽1）とした。軌道情報はIGSの精密暦とし、電離層遅延は二周波の線形結合によって補正した。また、対流圏天頂全遅延量も水平勾配と共に推定し、補正した。東北地方太平洋沖地震時の地表変動として、各観測点における14時49分15秒時の座標値と14時45分45秒時の座標値の差分をとった。

Fig. 4に、上記の方法により推定した2011年東北地方太平洋沖地震時の地表変動、および、それに対して逆解析を行った結果をまとめる。モデルとして、沈み込みプレート境界と調和的な位置に、矩形のモデル断層を17枚設定した。Elastic netに基づく解析の結果として、 $\alpha=0.8$ 、 $\lambda=0.00085$ を得た。なお、30回の試行で、 $\alpha$ はFig. 5のヒストグラムのような値をとった。

Fig. 4の左図に見られる東日本全域にわたるほぼ東向きの変動は、沈み込みプレート境界の逆断層運動によって説明できる。逆解析の結果、Fig. 4の右図が示すように、震源のやや西側の狭い領域、および、震源東側の海溝際の広い領域に20m–50mの巨大すべりが集中する解が得られた。これは、本研究と同様にGEONET観測点のデータを用いた先行研究（Inuma et al., 2011; Ozawa et al., 2011など）が震源を中心とした南北に長い楕円状のすべり分布を推定したのとは異なる。一方で、本研究の解は、近地の地震波形から推定されたすべり分布（Yoshida

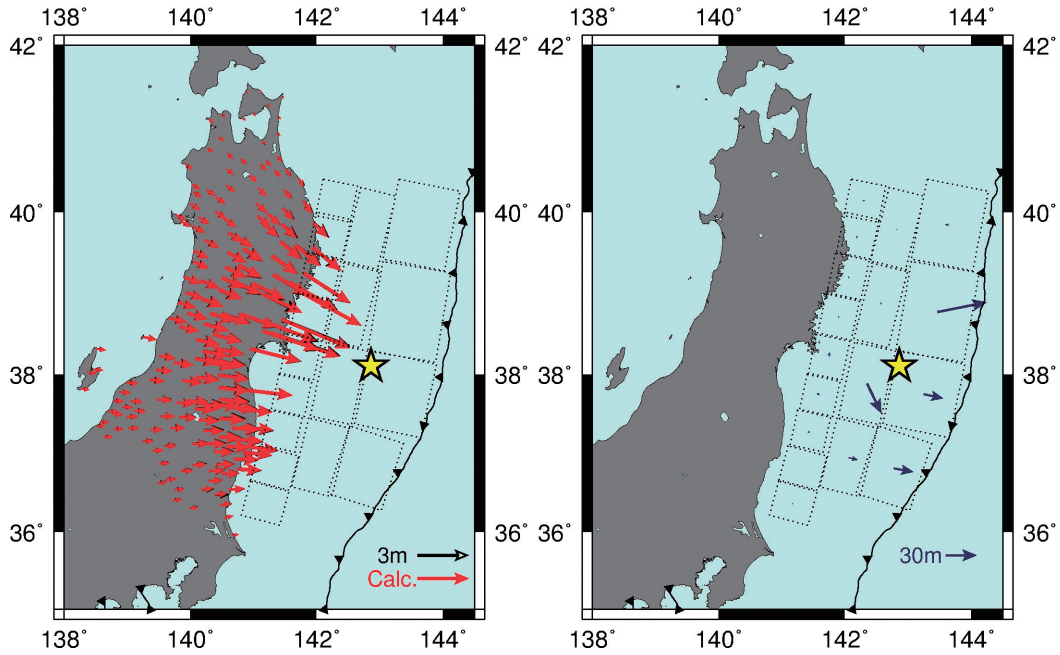


Fig. 4. Inversion result of the mainshock of the 2011 Tohoku earthquake. The black arrows in the left figure show the observed surface displacement and the red arrows exhibit the calculated displacement. The blue arrows in the right figure illustrate fault slips. The yellow stars show the epicenter of the 2011 Tohoku earthquake determined by Japan Meteorological Agency. The reference station is Otaru1, numbered 940013, at 141.031°E and 43.178°N.

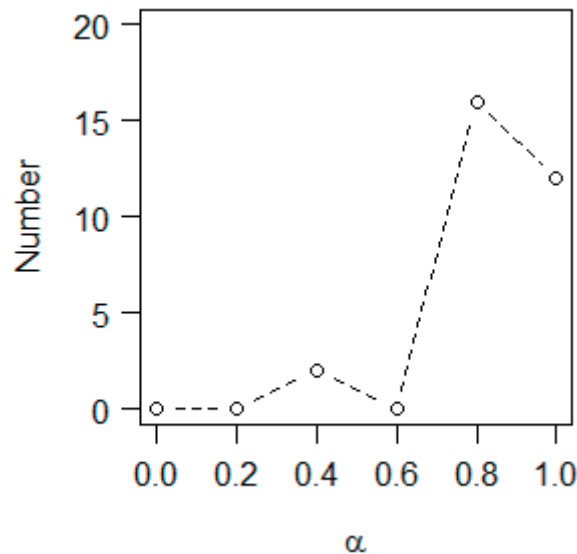


Fig. 5. Histogram of  $\alpha$  in the elastic net analysis for the case of the 2011 Tohoku earthquake.

et al., 2011) や、津波波形から推定されたすべり分布 (Satake et al., 2013) と、調和的である。陸上の GNSS 観測点のデータを用いた先行研究 (Iinuma et al., 2011; Ozawa et al., 2011 など) が海溝際の巨大すべりを推定しなかった点と比較すると、本研究の elastic net による解は、陸上の GNSS データのみでも解が破綻することなく海溝際の巨大すべりを推定できることを示している。

本研究の結果では、2011 年東北地方太平洋沖地震のモーメントマグニチュードは 9.0 となった。これは、上記の先行研究すべてとほぼ一致している。

## まとめ

L2 正則化・L1 正則化を組み合わせた一般的な正則化回帰法 elastic net を、陸上の GNSS 観測点データを用いた地殻変動逆解析に適用した。2000 年代前半に生じた東海スロースリップイベント、並びに、2011 年東北地方太平洋沖地震について、おおむね先行研究と調和的な解を得た。2011 年東北地方太平洋沖地震については、陸上の GNSS 観測点データを用いた先行研究と異なり、震源のやや西側の狭い領域、および、震源東側の海溝際の広い



領域に20m – 50mの巨大すべりが集中する解を得た。

## 謝辞

産業技術総合研究所の落唯史研究員には、原稿を改善するために有益なコメントをいただきました。感謝いたします。国土地理院のGEONET観測網のデータとGSILIBを使用させていただきました。

## 引用文献

- Aster R. C., Borchers B. & Thurber C. H. (2012), Parameter estimation and inverse problems. 2nd ed, Academic Press, Cambridge.
- Evans E. L. & Meade B. J. (2012), Geodetic imaging of coseismic slip and postseismic afterslip: Sparsity promoting methods applied to the great Tohoku earthquake. *Geophys. Res. Lett.*, **39**, L11314.
- Friedman J., Hastie T. & Tibshirani R. (2010), Regularization paths for generalized linear models via coordinate descent. *J. Stat. Software*, **33**, 1.
- 深畑幸俊 (2009), 地震学におけるABICを用いたインバージョン解析研究の進展. *地震 第2輯*, **61**, S103-S113.
- 深畑幸俊・八木勇治・三井雄太 (2012), 2011年東北地方太平洋沖地震による絶対歪みの解放: 遠地実体波インバージョン解析と動的摩擦弱化. *地質学雑誌*, **118**, 396-409.
- Iinuma T., Ohzono M., Ohta Y. & Miura S. (2011), Coseismic slip distribution of the 2011 off the Pacific coast of Tohoku Earthquake (M 9.0) estimated based on GPS data -Was the asperity in Miyagi-oki ruptured?. *Earth Planets Space*, **63**, 643-648.
- Jackson D. D. (1972), Interpretation of inaccurate, insufficient and inconsistent data. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **28**, 97-109.
- 松浦充宏 (1991), 地球物理学におけるインバージョン理論の発展. *地震 第2輯*, **44**, 53-62.
- 望月一磨・三井雄太 (2016), 伊豆半島基部における衝突起源の隆起現象をGNSSデータを用いて検出する試み. *静岡大学地球科学研究報告*, **43**, 1-11.
- Mochizuki K. & Mitsui Y. (2016), Crustal deformation model of the Beppu – Shimabara graben area, central Kyushu, Japan, based on inversion of three-component GNSS data in 2000–2010. *Earth Planets Space*, **68**, 177.
- 中川弘之・豊福隆史・小谷京湖・宮原伐折羅・岩下知真子・川元智司・畑中雄樹・宗包浩志・石本正芳・湯通堂亨・石倉信広・菅原安弘 (2009), GPS連続観測システム (GEONET) の新しい解析戦略 (第4版) ルーチン解析システムの構築について. *国土地理院時報*, **118**, 1-8.
- Nakata R., Kuwatani T., Okada M. & Hori T. (2016), Geodetic inversion for spatial distribution of slip under smoothness, discontinuity, and sparsity constraints. *Earth Planets Space*, **68**, 20.
- Nishimura T., Sagiya T. & Stein R. S. (2007), Crustal block kinematics and seismic potential of the northernmost Philippine Sea plate and Izu microplate, central Japan, inferred from GPS and leveling data. *J. Geophys. Res.*, **112**, B05414.
- Ochi T. & Kato T. (2013), Depth extent of the long-term slow slip event in the Tokai district, central Japan: A new insight. *J. Geophys. Res.*, **118**, 4847-4860.
- Okada Y. (1992), Internal deformation due to shear and tensile faults in a half-space. *Bull. Seis. Soc. Am.*, **82**, 1018-1040.
- Ozawa S., Nishimura T., Suito H., Kobayashi T., Tobita M. & Imakiire T. (2011), Coseismic and postseismic slip of the 2011 magnitude-9 Tohoku-Oki earthquake. *Nature*, **475**, 373-376.
- Ozawa S., Tobita M. & Yurai H. (2016), A possible restart of an interplate slow slip adjacent to the Tokai seismic gap in Japan. *Earth Planets Space*, **68**, 54.
- Sagiya T. (1999), Interplate coupling in the Tokai District, Central Japan, deduced from continuous GPS data. *Geophys. Res. Lett.*, **26**, 2315-2318.
- Satake K., Fujii Y., Harada T. & Namegaya Y. (2013), Time and space distribution of coseismic slip of the 2011 Tohoku Earthquake as inferred from tsunami waveform data. *Bull. Seis. Soc. Am.*, **103**, 1473-1492.
- 水藤尚・小沢慎三郎 (2009), 東海地方の非定常地殻変動—東海スロースリップと2004年紀伊半島南東沖の地震の余効変動—. *地震 第2輯*, **61**, 113-135.
- 瀬野徹三 (2012), 南海トラフ巨大地震—その破壊の様態とシリーズについての新たな考え—. *地震 第2輯*, **64**, 97-116.
- Tibshirani R. (1996), Regression Shrinkage and Selection via the Lasso. *J. R. Statist. Soc. B*, **58**, 267-288.
- Yoshida Y., Ueno H., Muto D. & Aoki S. (2011), Source process of the 2011 off the Pacific coast of Tohoku Earthquake with the combination of teleseismic and strong motion data. *Earth Planets Space*, **63**, 565-569.
- Zou H. & Hastie T. (2005), Regularization and variable selection via the elastic net. *J. R. Statist. Soc. B*, **67**, 301-320.

