

代数から  
コンピュータへ

# 四角い箱の中身

数を文字で表すようになって、人間の計算する力は一気に拡大しました。昔々、代数が誕生した頃のことです。

それから何百年かたって、私たちは再び計算の力が一気に拡大する時代を迎えます。コンピュータの誕生です。

科学技術や私たちの生活に飛躍的な進歩をもたらしたコンピュータの中には、ありとあらゆる「科学」が詰め込まれています。その中で数学は目に見えない部分、つまり論理的な部分をつかさどっています。

インターネットを見たり、メールを送ったり・・・あなたの目の前で今日も数学は懸命に活躍しているのです。



# フェルマーの最終定理が証明されるまで

350年間、誰も解くことができなかった数学の問題があります。それがフェルマーの最終定理です。しかし、この超難問は1994年にワイルズというイギリス人によって解かれました。そしてそのヒントを考え出したのは2人の日本人でもありました。

## フェルマーの最終定理とは？

350年以上も昔、近代整数論の始祖として活躍したフェルマーは、本の余白に次のように書き残しました。

「 $n$ が3以上の時に、方程式

$$x^n + y^n = z^n$$

を満たす自然数  $x, y, z$  は存在しない。私はこのことの驚くべき証明を発見したが、この余白はそれを書くには狭すぎる。」

フェルマーの最終定理と呼ばれるこの言明を証明しようとして、多くの人が努力しましたが、果たせず、しかしその試みの中で新しい数学理論が次々と生まれました。



### フェルマー

17世紀のフランスの数学者。アマチュア数学者であったフェルマーは、整数論の研究以外にも、微積分学の先駆者としても知られ、またバスカルとの手紙は、確率論の先駆けとして有名です。資料提供：日本評論社

### ワイルズ

フェルマーの最終定理をついに証明したのは、アンドリュー・ワイルズです。ワイルズは、大変若い頃から、パーチとスウィグナートン・ダイヤーの予想について大きな仕事をするなど、整数論で大活躍してきた人です。フェルマーの最終定理の証明では、構想を得てから長い間、屋根裏部屋にこもって研究を続けたと伝えられています。写真：PPS通信社

## 「ヒント」は日本人によって

1955年日光で開かれた研究会で、出席者谷山は楕円曲線と保型関数についての一つの予想を提出しました。この予想は、後に志村によって、正確な形にされました。

1986年、フライは谷山・志村の予想を証明すれば、フェルマーの最終定理が証明されることを発見しました。

そして、ついに1994年、ワイルズによって、フェルマーの最終定理は証明されました。

ワイルズは、谷山・志村予想をフェルマーの最終定理の証明に必要な程度まで証明したのです。

## ワイルズの証明

ワイルズの証明は、 $x^n + y^n = z^n$  の解（があったとして、背理法！）、その解からあるやり方で決まる数  $a, b$  について、式

$$Y^2 = X(X-a)(X-b)$$

で表される図形を調べることでなされました。

### 谷山豊

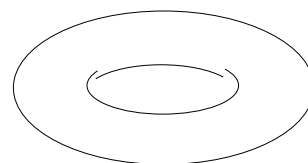
谷山は、 $l$  進表現、保型関数論などの数論の分野に独創的な業績を残しました。おしくも若くして亡くなりましたが、その名前は、伝説の天才数学者として、世界中の整数論研究者の間で有名です。写真提供：日本評論社



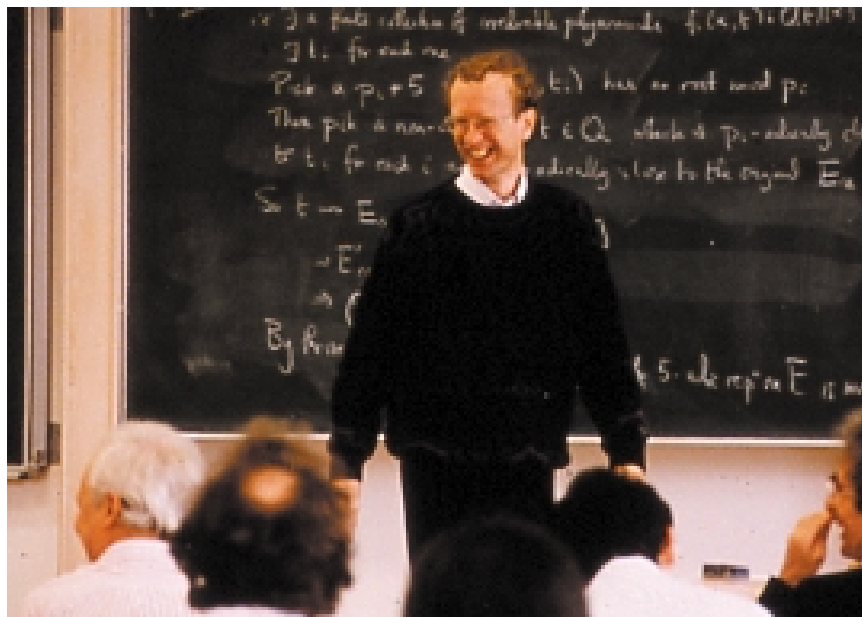
### 志村五郎

志村は後にアメリカに渡り、プリンストン大学で、保型関数などの整数論の様々な分野の研究の、世界的な指導者として活躍しました。その名を冠する志村多様体は、整数論の研究の重要な対象として、現在でも盛んに研究されています。

この図形は、 $X, Y$  が複素数の範囲で考えると、図のような形をしていて、楕円曲線と呼ばれます。



楕円曲線



# ガロア体と計算機

19世紀の若き天才数学者は「 $1+1=0$ 」という、不思議な数学の世界を発見しました。そしてその成果は時を超え、20世紀後半に発明されたコンピュータの中で開花することになりました。

## 1 + 1 = 0

$1+1=0$ 。こんな式が何かの役に立つと思う人はまずいないでしょう。

しかし、「 $1+1=0$ の数学」は、情報通信や確率シミュレーションにおいて不可欠の存在となっています。

コンピュータは情報を0,1の二値（ビット）の列にして、処理します。たとえば電子メールでアルファベットのAを送るには、00100001を送ります。



### ガロア

19世紀フランスの数学者。その短い20年の生涯の中で、群、有限体（ガロア体）などの、多くの発見をして、数学の世界に革命をもたらしました。資料提供：日本評論社

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx + d = 0$$

### 5次方程式

ガロア体は5次方程式の研究の中から発見された。

## 暗号化

ネットワーク上で情報を送るときには、ハッカーに情報が漏れるのを防ぐために、「暗号化」をして送信します。

暗号化をして情報を送るには、送る人と受ける人で、「合言葉」になる数字、たとえば01110011を決めておきます。そして、Aに対応する00100001を送りたいときには、合言葉の01110011を足して送るのです。

このときの足し算は、 $1+1=0$ の足し算です。

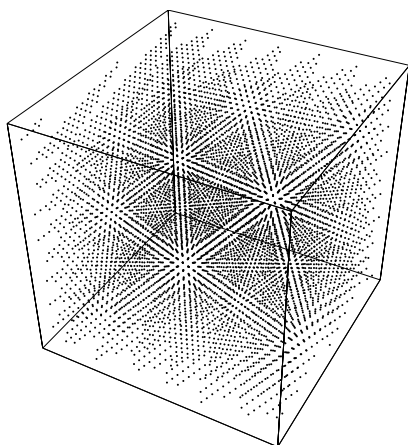
何万文字もある文書の暗号化をするには、短い合言葉では足りません。

そこで短い合言葉から長いでたらめな数の列を作ります。この列を作るところで、再び $1+1=0$ の数学が活躍するのです。

## ガロア体

$1+1=0$ の数学世界（ガロア体とよばれる）は、19世紀初めにガロアにより導入されました。

100年をへて、20世紀のデジタルコンピュータの発達によって、ガロア体には、思いもよらなかったような応用



通常の $1+1=2$ の計算規則を用いたC言語のプログラムrandにより生成された空間内の「ランダム」な点列

ランダムとは言い難い結晶構造が見られる。

|   |   |   |
|---|---|---|
| + | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

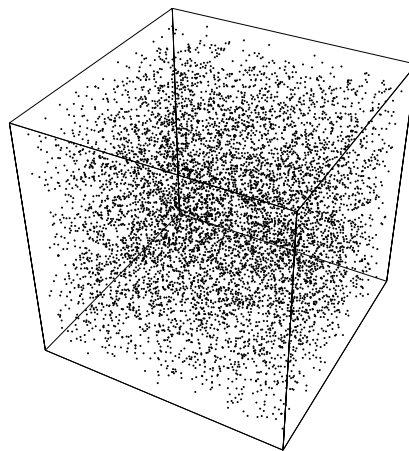
2つの元からなるガロア体の足し算

|   |   |   |
|---|---|---|
| × | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

2つの元からなるガロア体のかけ算

が見つかったのです。

それは、コンピュータの中では、 $1+1=0$ の数学世界の方が通常の数学世界よりずっと効率良く実現されるからなのです。



$1+1=0$ の数学に基づき、松本眞・西村拓士両氏が開発したメルセンヌツイスター法により生成されたランダムな点列

従来の生成法より遥かに乱数性が高く高速で、国内外で高く評価されている。

# 特異点解消と計算代数

人間が描く似顔絵と写真とはどこが違うのでしょうか？似顔絵を描く時には、相手の特徴を捕らえて、時にはそれを思いっきり誇張して描きます。例えば八重歯だとかホク口だとか・・・。

図形の「ホク口」にあたるのが特異点です。図形の特徴が分かるためには、特異点をしっかり描かなければなりません。そのためには図形を表す式について理論的な考察をすることが大切なのです。

## 特異点解消の問題

多項式を使って定義される図形には、ところどころ、複雑に絡み合った特異点と呼ばれる部分があります。

方程式

$$x^2 + y^2 + z^3 = 0$$

で表される図形では、原点(0,0,0)が特異点です。

特異点があると、多項式を使って定義される図形を調べる上で、困難が起ります。

あるいは図形の持っている大切な情報が、特異点の回りのからまりの中に隠れてしまって見えづらくなります。特異点のからまりをほぐすのが特異点の解消の問題です。

下の図は数式処理ソフトでかいた、 $x^2 + y^2 + z^3 = 0$  の特異点の絵です。

このような絵をコンピュータに書かせようとすると、特異点のところなかなかきれいに書けません。

図の中で一番情報が詰まっている特異点のところを正しく理解するには、機械に任せてしまうのではなく、人間の頭で考える必要があるのです。



廣中平祐 写真提供：日本評論社

## 標準基底

特異点解消の問題は、図形の次元が1, 2の場合には19世紀に解決されていて、また図形の次元が3次元の場合には1944年にアメリカの数学者オスカーク・ザリスキーが解決していました。

廣中平祐は1964年に発表した論文で、すべての次元の特異点の解消の問題を解決しました。

廣中の論文は、200余頁の長大なもので、証明に4重帰納法を用いる大作でした。

廣中は、特異点解消の問題を解決した論文の中で、図形を定義する方程式を調べるために、標準基底というアイデアを考えました(注)。

## グレブナー基底

標準基底のアイデアは、多項式の計算をシンボリックに行う計算代数の中で再登場しました。

廣中より少し遅れて、ブックバーガーは廣中の標準基底と同じような概念に到達し、それをグレブナー基底と呼びました。

ブックバーガーは方程式の組を与えたとき、そのグレブナー基底を求めるやり方(アルゴリズム)を発見しました。

注：

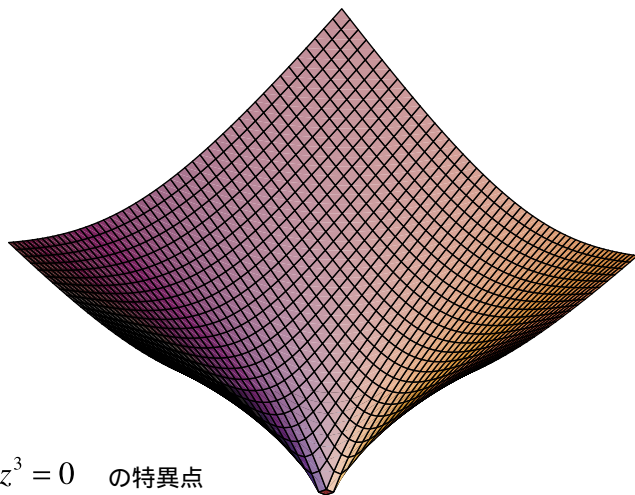
廣中の標準基底とグレブナー基底には、局所的と大域的と言う差はありますが、本質的なアイデアは同じです。

## コンピュータによる発展

標準基底とその計算法は、電子計算機の発達に助けを借りて、これまで不可能だと考えられてきた、多項式のいろいろな計算を可能にしました。

```
GroebnerBasis[
{x^3 + y^4 + z^5 - 1, x^3 + y^3 + z^2 - 1},
{t, y, z}]

{19 y^2 - 3 y^4 - 10 y^5 + 10 y^6 - 8 y^7 + y^8 + 5 y^9 -
28 y^10 + 33 y^11 + 28 y^12 + 5 y^13 - 3 y^14 + 8 y^15 +
3 y^16 + 18 y^17 + 30 y^18 + 33 y^19 + 30 y^20 + 13 y^21 -
28 y^22 + 3 y^23 + 10 y^24 - 5 y^25 + 5 y^26 + y^27 +
-88 y^28 - 32 y^29 - 32 y^30 + 228 y^31 + 128 y^32 + 80 y^33 -
88 y^34 - 80 y^35 + 18 y^36 + 38 y^37 + 18 y^38 - 480 y^39 -
182 y^40 - 182 y^41 + 788 y^42 + 708 y^43 + 480 y^44 -
480 y^45 - 480 y^46 - 480 y^47 + 90 y^48 + 88 y^49 +
88 y^50 - 80 y^51 - 88 y^52 - 88 y^53 - 2080 y^54 +
288 y^55 - 288 y^56 + 2872 y^57 + 2872 y^58 +
1880 y^59 - 2240 y^60 - 2240 y^61 - 2240 y^62 +
284 y^63 + 284 y^64 + 284 y^65 + 284 y^66 - 432 y^67 - 432 y^68 -
432 y^69 - 642 y^70 + 520 y^71 + 522 y^72 + 1884 y^73 +
1838 y^74 + 718 y^75 - 3502 y^76 - 3522 y^77 -
1642 y^78 + 424 y^79 + 428 y^80 + 422 y^81 -
872 y^82 - 872 y^83 - 872 y^84 + 1768 y^85 + 2068 y^86 +
2220 y^87 - 848 y^88 - 856 y^89 - 1472 y^90 -
552 y^91 - 872 y^92 - 792 y^93 + 380 y^94 +
384 y^95 + 408 y^96 - 378 y^97 - 308 y^98 - 416 y^99 +
3882 y^100 + 2820 y^101 + 2748 y^102 - 4584 y^103 -
4136 y^104 - 3648 y^105 + 3542 y^106 + 3232 y^107 +
922 y^108 + 88 y^109 + 132 y^110 + 188 y^111 + 1614 y^112 -
84 y^113 + 1442 y^114 + 1334 y^115 + 1823 y^116 - 107 y^117 -
324 y^118 + 4787 y^119 - 4406 y^120 - 2000 y^121 +
2738 y^122 + 2440 y^123 + 2018 y^124 - 294 y^125 -
188 y^126 + 37 y^127 + 3228 y^128 + 240 y^129 + 2770 y^130 +
2552 y^131 - 3488 y^132 - 4922 y^133 - 4180 y^134 -
278 y^135 - 1212 y^136 + 234 y^137 + 2808 y^138 +
2858 y^139 + 2770 y^140 - 368 y^141 - 338 y^142 -
218 y^143 + 3827 y^144 - 388 y^145 + 1238 y^146 + 1308 y^147 -
5332 y^148 - 5028 y^149 - 4238 y^150 + 4061 y^151 +
2338 y^152 + 2781 y^153 - 88 y^154 + 795 y^155 +
711 y^156 - 276 y^157 - 342 y^158 - 218 y^159 -
2584 y^160 + 115 y^161 - 2716 y^162 - 1188 y^163 - 1208 y^164 -
585 y^165 - 1244 y^166 + 3544 y^167 + 2916 y^168 +
```



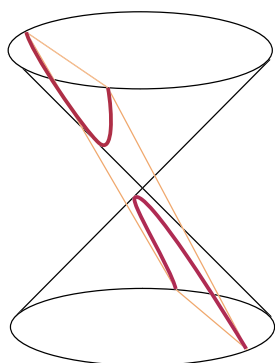
$x^2 + y^2 + z^3 = 0$  の特異点

数式処理ソフト上でのグレブナー基底の計算

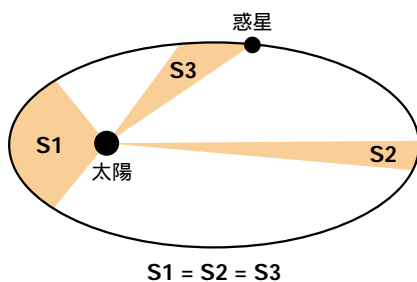
数学



# 幾何学と理論物理学 2000年のつきあい

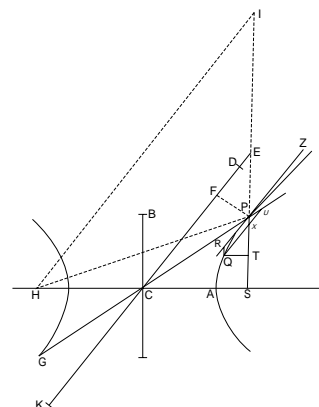


円錐曲線



ケプラーの第2法則

太陽と惑星を結ぶ線分が一定時間に描く面積は一定である。



双曲線に沿った運動 (プリンキピアより)

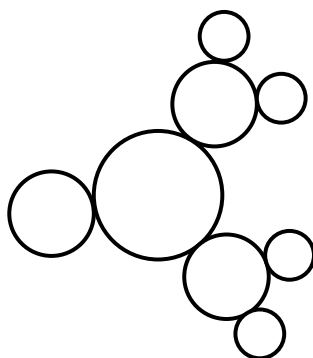
数学

| 前3世紀                            | 前2世紀                              | 16世紀                     | 17世紀   | 18世紀から19世紀                                  | 18世紀から19世紀  | 1860年代                          |
|---------------------------------|-----------------------------------|--------------------------|--|---|---|---------------------------------|
| ユークリッド…幾何学原論によって、論理的体系的に幾何学を記述。 | アポロニウス…円錐曲線論(円錐曲線とは楕円、放物線、双曲線のこと) | ケプラー…惑星の運動が円錐曲線であることを発見。 | ニュートン…ユークリッド幾何学原論のスタイルで、プリンキピア(自然哲学の数学的原理)を書き、重力理論によりケプラーの法則を説明。 | ファラデー・マックスウェル…場という考え方を用いて、電気力や磁力を幾何学的に説明した。 | ガウス…曲面の幾何学。空間の曲がり方を表す量、曲率を発見。我々の住んでいる空間が曲がっているかを測量により調べようとした。 | リーマン…高次元の曲がった空間の幾何学、リーマン幾何学を創始。 |

$$\int_{\Sigma} g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial s^a} \frac{\partial x^j}{\partial s^b} h^{ab} ds^a ds^b$$

## 弦のエネルギー

南部の定式化をポリヤコフらが改良したものです。エネルギーから決まる運動方程式の解は、数学では調和写像と呼ばれます。



リーマン面の退化

## 弦理論とリーマン面

超弦理論はひもの運動で、物理現象を説明します。その数学的基礎はリーマン面で、これは、ひもが動いた跡である曲面の理論です。

## リーマン面



$$\int_{\text{3角形}} \text{曲率} = \text{3角形の内角の和} - 180^\circ$$

## ガウス・ボンネの定理

3角形の内角の和の, 180°からのずれが, 空間の曲がり方をあらわす。

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx^i dx^j$$

## リーマン計量

曲がった空間で, 長さや面積を定めます。

$$g^* A = g^{-1} dg + g^{-1} Ag$$

## ゲージ変換

素粒子物理学の標準理論は, ほとんどすべての力をゲージ理論で説明します。

$$R_{ij} = T_{ij}$$

## アインシュタインの重力理論 (一般相対性理論) の基本方程式

空間の曲がり方がその場所のエネルギー密度に比例するという式。

$$\int \|dA + A \wedge A\|^2 dx$$

## ヤン・ミルズの汎関数

ゲージ理論の基本量であるヤン・ミルズ汎関数は, ゲージ場の曲率の2乗の積分です。

19世紀末

1910年代

1920年~

1920年代

1950年代

1960年代

1970年代から

ポアンカレ…高次元空間の大域幾何学(位相幾何学)を始める。

アインシュタイン…重力は空間が曲がることから起きることを発見。

ワイルやカルタンによって、ゲージ変換とか接続の概念が発見されました。

カルサ・クライン…高い次元の空間を使う、統一場の理論を提唱。(当時は不評)。

ヤン・ミルズ・内山…接続とゲージ変換に基づきゲージ場の理論を創始。

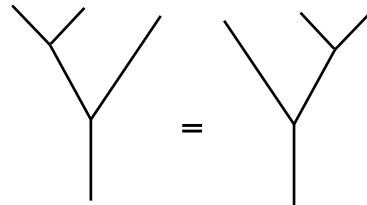
ワインバーグ・サラム・グラシヨウ…ゲージ理論によって弱い力と電磁場の統一理論を作る。

ゲージ理論や弦理論などで、次元の高い空間の幾何学や、大域幾何学が盛んに用いられるようになってきました。数学者の物理学への関心も、20世紀の最後になって、再び高まってきました。

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

## 結合法則

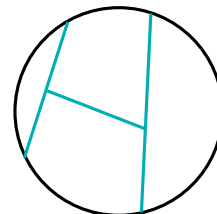
弦理論の基礎である交叉対称性は, かけ算の結合法則と関係があります。



## 交叉対称性

すべての力を統一する大統一理論になると期待される, 超弦理論は, およそ20世紀のありとあらゆる数学を使います。

超弦理論には21世紀の数学が必要であろう・・・  
(と知っている人もいます)



## コード図

絡み合ったひもを研究する結び目理論と場の量子論が関わるところで登場します。





可積分系

# 「独楽」の数学

数学者はさまざまな自然現象を数式で表現することにチャレンジします。

18世紀のスイスの数学者オイラーは独楽(コマ)の運動を方程式で示しました。

オイラーは「子供と遊びながらも論文が書けた」といわれるほどの天才数学者ですが、もしかしたら「コマの方程式」は、本当に子供と遊んでいるときに書いたのかもしれないね。

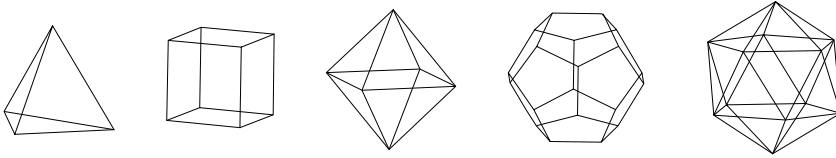


# 対称性と可積分系

美しい図形は高い対称性を持っています。

それと同じように、自然を表す微分方程式の解を、式で表すことができるのは、方程式に高い対称性がある場合です。

対称性が高い微分方程式の解を、具体的に求めていくのが、可積分系の研究です。

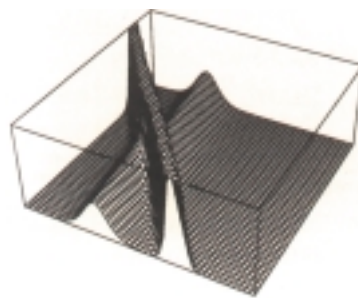
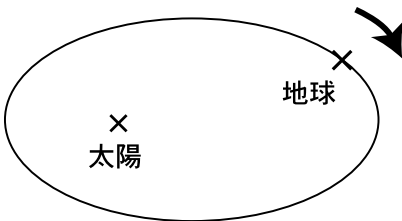


## 正多面体

古代から知られるこの5つの図形は、もっとも対称性が高い多面体です。

## 2体問題

太陽と地球の運動である2体問題は、可積分系の最初の例です。



Kdv方程式などの解には、ぶつかり合っても波の形が崩れないものがあり、孤立波（ソリトン）と呼ばれています。

## 群

対称性の研究には、ガロアが考えた群や、リーの考えた、リー群が役に立ちます。

20世紀には、リー群の基本単位である単純リー群や、有限群の基本単位である有限単純群の分類が完成しました。

## オイラーのコマ

外から力が働かないコマの運動の方程式は、オイラーが発見した可積分系の重要な例です。

$$\begin{cases} \alpha \frac{dx_1}{dt} = (\beta - \gamma)x_2x_3 \\ \beta \frac{dx_2}{dt} = (\gamma - \alpha)x_3x_1 \\ \gamma \frac{dx_3}{dt} = (\alpha - \beta)x_1x_2 \end{cases}$$

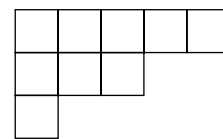
## 戸田格子

戸田盛和による戸田格子は、20世紀に発見された新しい可積分系です。

$$\frac{d^2 r_n}{dt^2} = 2e^{-r_n} - e^{-r_{n-1}} - e^{-r_{n+1}}$$

## ヤング図形

佐藤幹夫は、リー群と関係が深いヤング図形を使って、Kdv方程式や、その一般化であるKP方程式の解を書き表す方法を見つけました。



## Kdv方程式

Kdv方程式は川などの浅い水面を伝わる波の方程式です。

19世紀にKortewegとde Vriesが考え、今世紀後半の可積分系研究の高まりでも大きな役割を果たしました。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

## ラックス表示

アメリカの数学者ラックスは、行列を用いると、多くの可積分系が下のようないくつかの形の式、ラックス表示で書き表されることを発見しました。

$$\frac{d}{dt} L = [B, L]$$

## 量子群

対称性は表面には現れずに隠れていることがあります。

神保道夫とドリンフェルトは、量子群という「群もどき」を考え、統計物理学などに現れる可積分系の対称性をあばきだしました。

$$[X^+, X^-] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}$$



力学系  
・  
確率微分方程式

# 「複雑」 な「 $\infty$ 」 を表す

問題：これはなんでしょう？

「新発見の暗黒星雲！」  
「タコの足のレントゲン写真！」  
そう答えた人は、なかなかユニークな想像力をお持ちですが、残念ながら不正解。  
これは「マンデルブロー集合」と呼ばれる、数学でのちゃんとした集合なのです。  
規則があるようでないような・・・不思議な文様は芸術的とさえ思えてきます。



# 力学系から現れる複雑な図形

いろいろな現象が時間発展するようすを記述する数学的なモデルを力学系とよびます。

その中で、最も有名なのはニュートンの運動方程式です。

力学系のもつ、不思議かつ時として美しい世界的一端をご紹介します。

## 3体運動

いくつかの天体が重力の下で運動する場合を考えてみましょう。運動方程式は、微分方程式であらわれます。

天体の個数が2個のときは、軌道は円、楕円や双曲線などになり、その様子は完全に理解されています。

一方、天体の個数を3個以上にすると、一般にはその軌道を既知の関数で表現することはできなくなります。

実際、その軌道の長時間にわたる挙動を調べようとしても、わずかな初期値の違いが大きな違いを引き起こすため、大体の様子を予測することさえき

わめて困難になります。

3個の天体が、衝突したり無限の彼方に飛び去ってしまわずに永久に運動し続けるかを決定する問題は3体問題と呼ばれています。

$$m_j \frac{d^2 \vec{x}_j}{dt^2} = \sum_{j \neq i} G m_i m_j \frac{\vec{x}_j - \vec{x}_i}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3}$$

3体問題の基本方程式



3体問題で、複雑な軌道がうまれるこるメカニズム

## ロジスティクス写像

力学系の初期値をわずかに変えただけで、その後の軌道が大きく変わってしまう現象はカオスとも呼ばれています。

カオスは3体問題だけでなく、非常に多くの力学系で起きています。

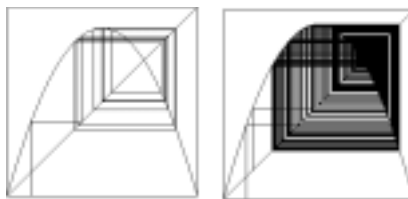
その一番簡単な例がロジスティクス写像と呼ばれる写像です。

ロジスティクス写像の様子はパラメータの値によって、いろいろ変わります。

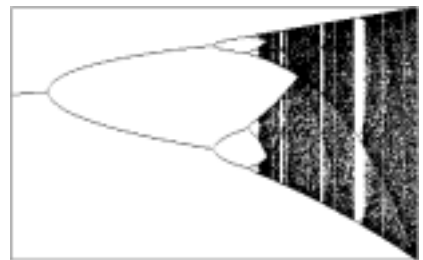
ほとんどの軌道が周期的軌道に引き込まれることもあれば、カオス的な挙動をすることもあります。

$$x_{\rho+1} = \alpha x_{\rho}(1 - x_{\rho})$$

ロジスティック写像  $(1 \leq \alpha \leq 4)$



ロジスティック写像を何回も合成したときの点の動き



の変化でカオスが生じる様子

## マンデルブロート集合

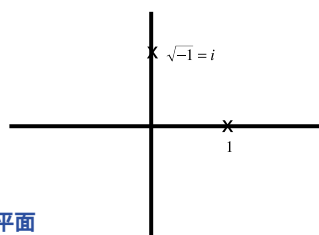
ロジスティクス写像の研究では、数列やパラメータを複素数の範囲まで広げて考えることが重要です。

複素数で考えることにより、複素解析に強力な手法が使えるのです。

カオス的な挙動をする軌道に対応する初期値の集合はジュリア集合と呼ばれ、ジュリア集合が連結になるパラメータの集合は、マンデルブロート集合と呼ばれます。

これらの集合は、数学的な美しさだ

けでなくグラフィックとしての美しさも併せ持ち、我々の目を楽しませてくれます。



複素平面



マンデルブロート集合の数々

数学



# 伊藤解析と数理ファイナンス

数学での発見は、時として数十年、数百年後に社会を動かすことがあります。

たとえば、現代の金融界に不可欠な理論になっている確率微分方程式は、第2次世界大戦中に発表された日本の数学者、伊藤清の論文が発展を遂げた成果なのです。

## 確率微分方程式

物理学では、微分方程式が理論を記述する基本的な道具でした。

さまざまな科学の分野で、不確実な現象を記述する道具として、1940年代に伊藤清により日本で創られた確率微分方程式が用いられています。確率微分方程式の理論は20世紀後半に大きく発展し、今日では確率解析と呼ばれています。

$$dF(X) = \sum_{i=1}^d D_i F(X) dX^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d D_i D_j F(X) d\langle X^i, X^j \rangle$$

### 確率解析の基礎になる伊藤の公式

ランダムな変数の置換積分の公式です。右辺第2項がふつうの微積分と違って、伊藤の公式は、数理ファイナンスでも主役を演じます。

## 金融工学への応用

確率解析の理論が現在もっともよく用いられているのは数理ファイナンス・金融工学の分野です。市場価格が変動するありさまを記述し、ランダムな市場の動きに対して、危険（リスク）の少ない方法を考えるのが金融工学の大事な目的ですが、確率解析はそのためにも不可欠な理論となっています。

$$-rF + rF_s S_t + F_t + \frac{1}{2} F_{ss} \sigma^2 S_t^2 = 0$$

### 金融工学で有名なブラック・ショールズの方程式

左辺第4項が伊藤の公式の右辺第2項に対応します。

## さらに広い分野で

確率論は統計的なデータを処理することを大きな目的としていて、自然科学・社会科学・人文科学など広い範囲で役立てられています。

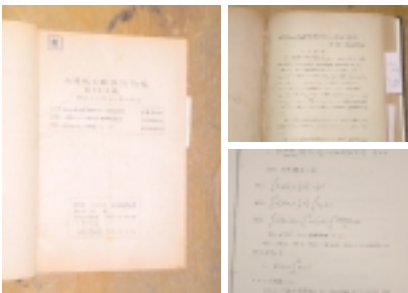
データを処理するには、それぞれの現象を記述する理論が必要です。

近年、コンピュータ・ITが発達し、大量のデータを高速に処理する事ができるようになりました。そのため、複雑で高度な確率モデルを理論の基礎に置いても、応用することが可能になりました。

数学

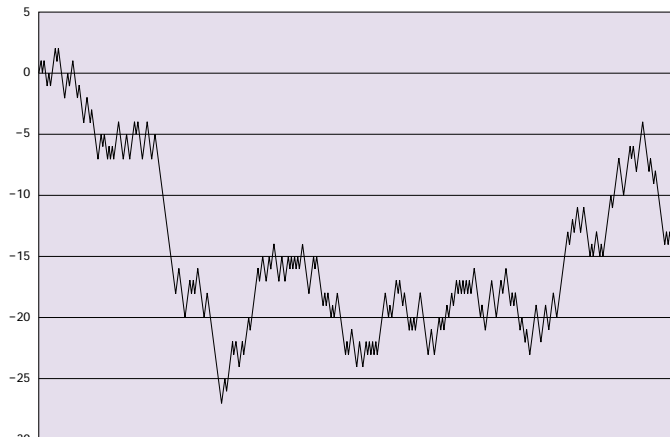
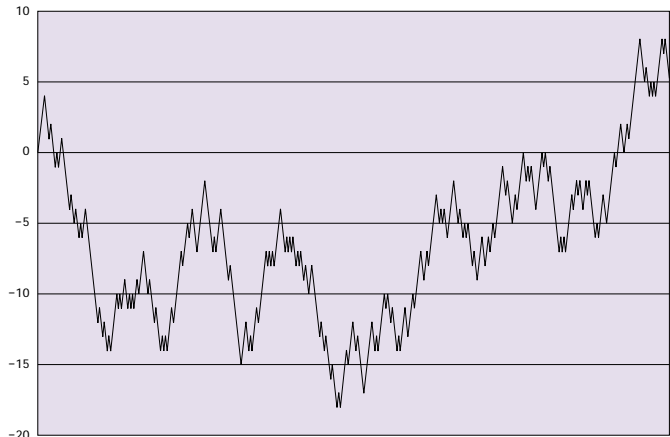


写真提供：日本評論社



上：伊藤清  
下：全国紙上談話会44号

確率解析の発展に決定的な役割を果たした伊藤の公式は、戦争中の困難な状況のもとで発見され、手書き・謄写版刷りの冊子「全国紙上談話会」に発表された。



株価の変動のようなランダムな現象を表すグラフ

# 流体の方程式

水や空気のような、ものの流れを扱う学問が流体力学です。

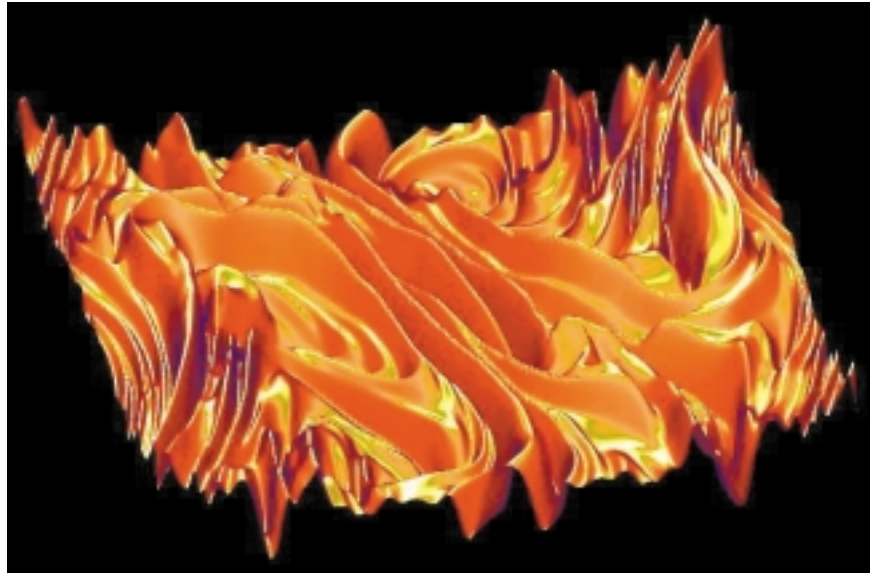
確かに「きれいな波紋」や「そよ風のような空気の流れ」が数式で表現できることは想像できるかもしれませんが、しかし、一見むちゃくちゃなように思える「乱流」さえも、方程式で表現する試みがいま行われているのです。

## ナビエ・ストークス方程式

流体力学の基本方程式はナビエ・ストークス方程式という微分方程式です。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad})\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \gamma \Delta \mathbf{u} + \mathbf{K}$$

流体力学の基本方程式ナビエ・ストークス方程式



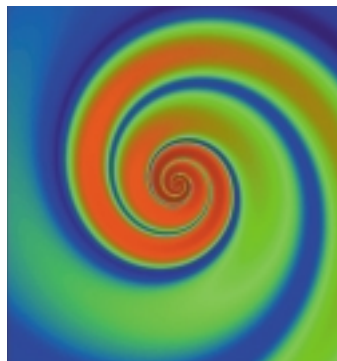
上：2次元乱流の可視化

平面内の流れのベクトル場が複雑化することを見るようにするには渦度と呼ばれる量の分布を見るのがよい。

この絵はある時刻での渦度の分布をコンピュータシミュレーションしたものである。激しく振動している様子が見える。

左：整った渦のパターン

このような、乱流と正反対の、きれいな渦もナビエ・ストークス方程式の解としてあらわれます。



## 70年間の謎

乱流も、きれいな渦のパターンも、ナビエ・ストークス方程式の解析から分かると信じられています。ナビエ・ストークス方程式は、いわば支配方程式なのです。

しかし、この方程式には解が存在するかどうかすら分かっていないのです。

「初期値と境界値を与えたとき、ナビエ・ストークス方程式に解が存在するか」は大きな未解決問題になっています。70年もの間、多くの優れた数学者が、この問題に挑戦してきましたが、彼らの挑戦はことごとく退けられてきました。この問題は、ミレニアムを記念して懸けられた、クレイ研究所の1000万ドルの懸賞問題の一つになっています。

## 謎はさらに深まる・・・

ナビエ・ストークス方程式には、ごくわずかの対称性もありません。流体の体積以外には保存量もありません。

これは、対称性の高い可積分系とは、正反対の方程式なのです。

だからこそ、乱流のような、複雑な現象を扱う支配方程式となることができません。

対称性も保存量もない方程式は、数学的な取り扱いには、まことにやっかいな方程式なのです。しかし、そこには多くの重要な問題が内包されていて、多くの数学者や物理学者を魅了してきました。

過去70年の間にナビエ・ストークス方程式の理論は着実に進歩してきました。

しかし、理論の進歩は解決した問題と同じくらのミステリーも生み出してきました。これから解くべき問題は、今まで解かれた問題より遙かに多いでしょう。

流体の運動の数理科学的研究は、21世紀数学の重要なフロンティアです。

流体の研究にはいろいろな側面があります。基本方程式の理論的な研究。コンピュータを用いた数値実験。これらは、ともに欠かせない研究の両輪で、どちらが欠けても、流体现象を理解することはできないのです。



# 地球環境を予測する方程式

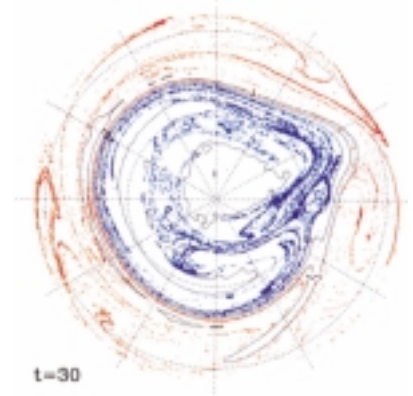
ナビエ・ストークス方程式は、数学や実験室の域にとどまらず、私たちの住む地球全体の環境さえも「支配」しているといわれています。

実際に行われている数値計算によるシミュレーションをご紹介します。

## 地球規模での流体運動

地球規模での大気や海洋の運動もナビエ・ストークス方程式に支配されています。日々の気象変化や長期の気候変動は、この方程式をスーパーコンピュータで解いて予測されています。また、同様の数値計算により、不規則に変動する大気や海洋の流れによってエネルギー

や物質が地球規模で循環している様子を知ることができます。オゾンホールを念頭においた「墨流し実験」では、成層圏でのオゾン破壊物質の輸送と混合の様子が、実験室内の3次元的な乱流混合と大きく異なっていることがわかりました。



数学

## 全世界の気候をコンピューターで予測する

世界の気候は、太陽からの熱と地球上に存在する水（水蒸気）を大気・陸・海の間でやり取りすることによって決まりますが、そこには気圧や風速・風向といった様々な気象条件が複雑にからみ合っています。この複雑な現象を全世界的な規模で予測するため、世界各地の気温(T)、湿度(q)、気圧(p)、風速(V)を初期値として、太陽放射によ

る熱力学方程式、水蒸気の連続方程式、風速の運動方程式などに関する微分方程式をコンピューターを用いた大規模な計算によって行ないます。右ページの図は、そのようにして求めた6月から8月の世界の気温と降雨量を示しています。大域的な分布がほぼ再現されていることがわかります。

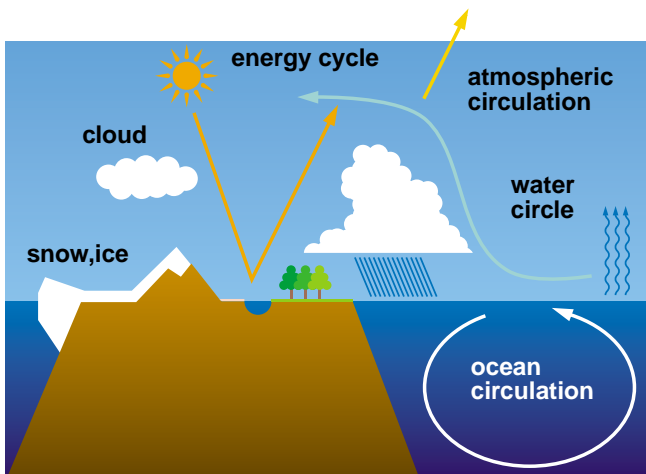
$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + F + D(V)$$

$$\frac{dT}{dt} = \Gamma w + Q + D(T)$$

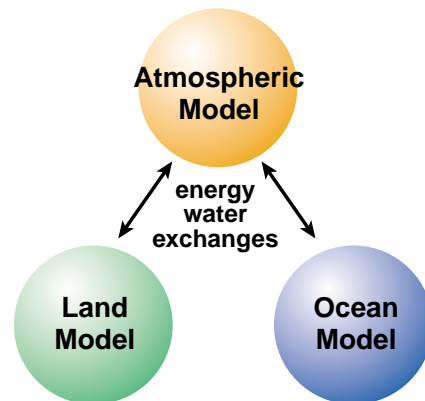
$$\frac{dq}{dt} = E - C + D(q)$$

## Climate System → Climate Model

exchange and transport system  
of energy and substance

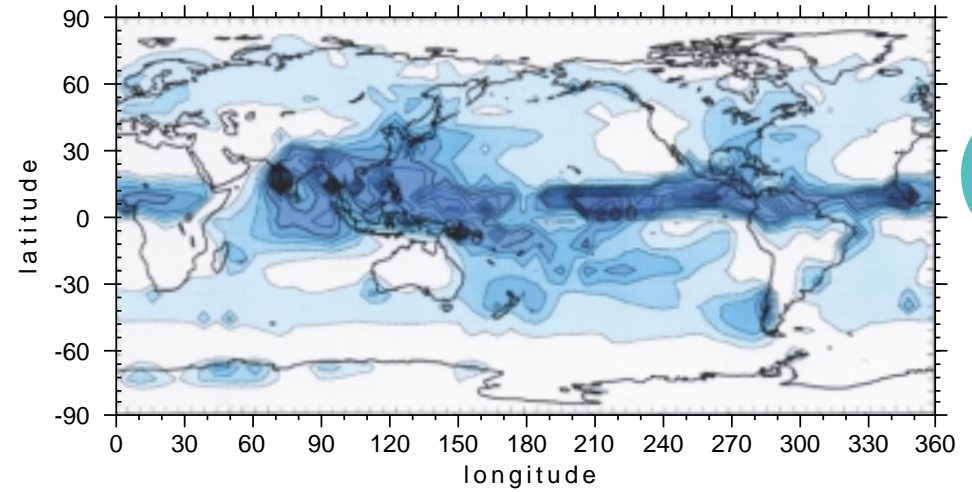
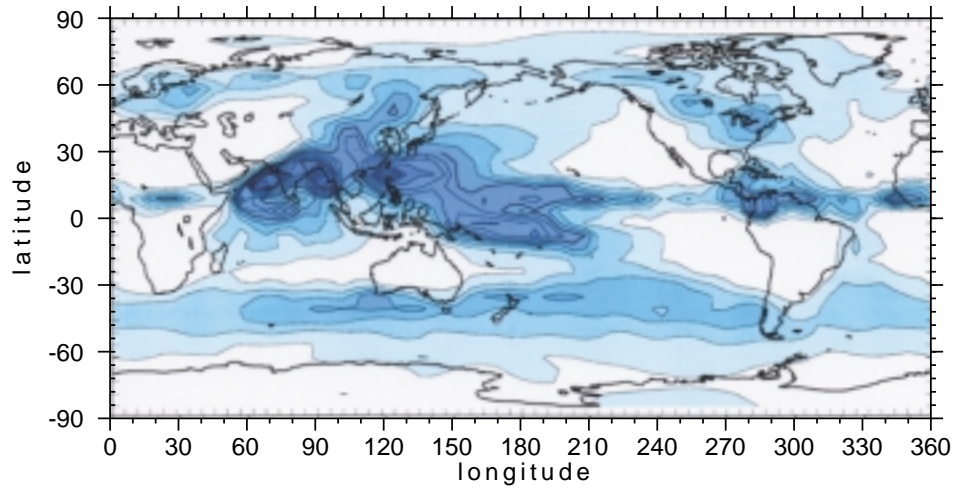


計算モデル

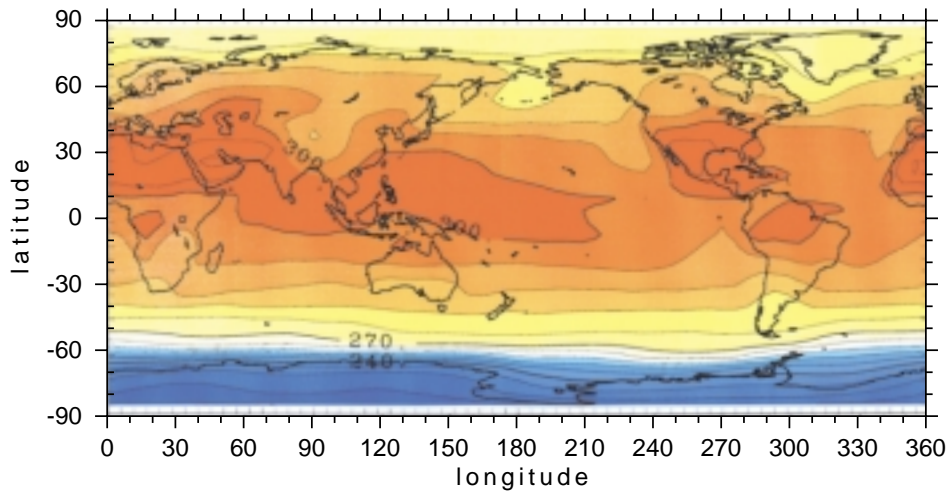


### 6 ~ 8月の世界の降雨量

(上) 計算で得られた降雨量分布  
(下) 実際の降雨量分布



数学



### 6 ~ 8月の世界の気温

(上) 計算で得られた気温分布  
(下) 実際の気温分布

